

بجای گذشته در مورد این تعداد روش استدلال بود و جمله گذشته آخر است در مورد روش استدلال گیری از تابع گویا صحبت می کردیم.

یادآوری: $\frac{\text{تابع گویا}}{\text{چند جمله ای}} = \frac{\text{چند جمله ای}}{\text{چند جمله ای}}$

ذکر کردیم که مراحل استدلال بگیر از تابع گویا به صورت زیر است:

۱ اگر درجه صورت بزرگتر یا مساوی درجه مخرج بود، صورت را بر مخرج تقسیم کرده در کار با رادیه کنیم.

۲ در کسر جدید به دست آمده قطعاً درجه صورت کمتر از درجه مخرج است.

۳ مخرج کسر جدید را تا حد امکان تجزیه می کنیم.

۴ کسر را تجزیه می کنیم و بعد استدلال می گیریم.

در مورد گام هر اول تا سوم در جمله گذشته صحبت کردیم و مثال زدیم. حال باید در مثال دیگر نیز به جزئیات کاملتر از گام چهارم را ذکر می کنیم. لذا تعداد فرض می کنیم که مراحل ۱ تا ۴ در مثال انجام شده است در چند مثال مرحله تجزیه را یادآور می کنیم.

روش:

مثال ۱: $\frac{x}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$

(مخرج جدید ۱ لذا صورت درجه صفر یا کمتر است)

$$\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x}{(x-1)(x+2)}$$

(خرج مشترک گیری)
(برای پیدا کردن مجهول است)

تساوی صورت $\Rightarrow x = A(x+2) + B(x-1)$
 $= x(A+B) + (2A-B)$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 & (\text{ضریب } x \text{ برابر}) \\ 2A-B=0 & (\text{مقادیر ثابت برابر}) \end{cases}$$

حل دستگاه $A = \frac{1}{3}, B = \frac{2}{3}$

به تعداد عامل مخرج کسر جدید می نویسیم.

مخرج هر کدام یکی از عامل را قرار می دهیم.

حال چون کسر اصلی درجه صورت از مخرج کمتر است

تمام کسر جدید هم باید همین گونه باشند.

بر همین اساس صورت را به گونه ای می نویسیم

مشخص می کنیم سپس مخرج مشترک می گیریم

و بدلیل تساوی در یک طرف و یک طرف مخرج را

صورت آن را هم مساوی قرار می دهیم. از این تساوی

دستگاهی به دست می آید که از حل آن مجهول است (صورت کسر جدید)

به دست می آیند. لذا کسر تجزیه می شود

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)} = \frac{\frac{1}{x}}{x-1} + \frac{\frac{2}{x}}{x+2}$$

تجزیه

مثال ۲: $\frac{x^2-1}{(x+2)(x-2)(x+4)}$

$$= \frac{?}{x+2} + \frac{?}{x-2} + \frac{?}{x+4} \quad (\text{سه عامل لذا سه کسر})$$

$$= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+4} \quad (\text{درجه صورت از مخرج کمتر به صورت مجهول})$$

$$= \frac{A(x-2)(x+4) + B(x+2)(x+4) + C(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-2)(x+4)} \quad (\text{مخرج مشترک گیری})$$

$$x^2-1 = A(x-2)(x+4) + B(x+2)(x+4) + C(x+2)(x-2) \quad (\text{تساوی صورت کرد})$$

$$= A(x^2+x-12) + B(x^2+6x+8) + C(x^2-x-6) \quad (\text{ساده و مرتب کرد})$$

$$= x^2(A+B+C) + x(A+6B-C) + (-12A+8B-6C)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C=1 \\ A+6B-C=0 \\ -12A+8B-6C=-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \dots$ با حل این دستگاه معادلات بدست آمده و لذا کسر تجزیه می شود

مثال ۳: $\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}$

$$= \frac{?}{(x-1)} + \frac{?}{(x-1)^2} + \frac{?}{x+2}$$

درجه تجزیه: توان ۱ در ۲

در مواردی که عامل یا عوامل تجزیه شده در مخرج توان بیش از یک داشته باشند در کسر هر جمله از توان یک آن عامل تا به توان مورد در مخرج که اصلی را می نویسیم به مثال کم توجه کنید:

مثال ۴: $\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)^2}$

$$= \frac{?}{x-1} + \frac{?}{(x-1)^2} + \frac{?}{x+2} + \frac{?}{(x+2)^2} + \frac{?}{(x+2)^3}$$

درجه تجزیه: توان ۱، ۲ در ۲

مثال ۵: $\frac{x+1}{(x-1)(x+2)^2(x+3)^2}$

$$= \frac{?}{x-1} + \frac{?}{x+2} + \frac{?}{(x+2)^2} + \frac{?}{(x+3)} + \frac{?}{(x+3)^2} + \frac{?}{(x+3)^3}$$

درجه تجزیه: توان ۱، ۲ در ۲

در این حالت برای تعیین درجه صورت این کار به این شکل عمل می‌کنیم
 که درجه کسر را با فنج ج می‌کنیم (اگر این که مرتبه آن عامل یکسان و
 با توان مختلف دارند) درجه این نوع کار را از درجه کسر و صورت
 درجه صورت کسر با درجه اول تعیین می‌کنیم. به مثال آخر درجه می‌نمایند.

۳ مثال: $\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$

درجه صورت: ۱
 درجه کسر: ۱
 درجه صورت: ۱
 درجه کسر: ۱
 درجه صورت: ۱
 درجه کسر: ۱

۴ مثال: $\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2} + \frac{E}{(x+2)^3}$

درجه صورت: ۱
 درجه کسر: ۱
 درجه صورت: ۱
 درجه کسر: ۱
 درجه صورت: ۱
 درجه کسر: ۱
 درجه صورت: ۱
 درجه کسر: ۱

۵ مثال: $\frac{x+1}{(x-1)(x+2)^2(x+3)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+3} + \frac{E}{(x+3)^2} + \frac{F}{(x+3)^3}$

درجه صورت: ۱
 درجه کسر: ۱
 درجه صورت: ۱
 درجه کسر: ۱
 درجه صورت: ۱
 درجه کسر: ۱
 درجه صورت: ۱
 درجه کسر: ۱

۶ مثال: $\frac{x^2}{(x-1)(x^2+1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{D}{x+2} + \frac{E}{(x+2)^2}$

درجه صورت: ۲
 درجه کسر: ۲
 درجه صورت: ۱
 درجه کسر: ۱
 درجه صورت: ۱
 درجه کسر: ۱

۷ مثال: $\frac{x}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$

درجه صورت: ۱
 درجه کسر: ۱
 درجه صورت: ۱
 درجه کسر: ۱
 درجه صورت: ۱
 درجه کسر: ۱

۸ مثال: $\frac{x}{(x-1)^3(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}$

درجه صورت: ۱
 درجه کسر: ۱
 درجه صورت: ۱
 درجه کسر: ۱
 درجه صورت: ۱
 درجه کسر: ۱
 درجه صورت: ۱
 درجه کسر: ۱

حال از چند تابع گویا انتگرال می‌گیریم

$$1) \int \frac{x^2+2}{x^2+1} dx$$

$$\frac{x^2+2}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

$$x^2+2 = 1(x^2+1) + 1$$

$$= \int \frac{(x^2+1)+1}{x^2+1} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right) dx = x + \int \frac{1}{x^2+1} dx = x + \arctan x + C.$$

$$2) \int \frac{x}{(x-1)(x+2)} dx$$

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$\Rightarrow x = A(x+2) + B(x-1) = x(A+B) + (2A-B)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ 2A-B=0 \end{cases}$$

$$2A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2} \Rightarrow B=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{(x-1)(x+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{(x-1)(x+2)} dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+2} \right) dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+2| + C.$$

نکته: همان گونه که جمله گذشتۀ ذکر کردیم، روش ذکرشده روش جامع و کلی است که انتگرال تابع گویا را به خوبی می‌رساند ولی بهتره به تابع گاهی اوقات روش اینکار و تکنیک‌های عمیق‌تر ممکن است مورد نیاز باشد (و بعد درشته باشد).

$$3) \int \frac{x}{x^2+1} dx = \int \frac{\frac{1}{2} du}{u} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln|u| = \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C$$

$$u = x^2+1$$

$$du = 2x dx$$

$$\frac{1}{2} du = x dx$$

$$5) \int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)} dx$$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \underbrace{\frac{A}{x-1}}_{\text{درجه 0}} + \underbrace{\frac{Bx+C}{x^2+1}}_{\text{درجه 1}} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow x = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1) = Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

$$= (A+B)x^2 + (-B+C)x + (A-C)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -B+C=1 \\ A-C=0 \end{cases}$$

ضرایب در طرف راست به ترتیب مساوی می‌کنیم

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases}$$

$$2A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2} \Rightarrow B=-\frac{1}{2}, C=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1}$$

درجه 1 قرار می‌دهیم

$$\Rightarrow \int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)} dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1} dx + \int \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x^2+1} dx$$

حل اول

$$\int \frac{x-1}{x^2+1} dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+1| - \arctan(x) + C$$

حل دوم

$$\int \frac{x-1}{x^2+1} dx = \int \frac{x-1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+1| - \arctan(x) + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)} dx = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \ln|x^2+1| - \arctan(x) \right) + C.$$

حال بدلیل محدودیت زمان (که کلاس محبت کرده بودیم) ادامه بحث روشی که اشتغال گیر را می‌کنیم و بحث دنباله‌های را
به طور مختصر مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

دنباله خانوادگی (متناهی یا نامتناهی) از اعداد است که با نظم و ترتیب خاصی قرار می‌گیرند.

دنباله دو تفاوت اصلی با مجموعه دارد
۱ در مجموعه تکرار را نمی‌پذیریم و نداریم؛ اما همه اعضای یک دنباله هم می‌توانند تکرار شوند.
۲ در مجموعه ترتیب خاصی ندارد (در حالت کلی)؛ اما در دنباله ترتیب بسیار مهم است.

دنباله‌ها از دیدگاه مختلف دسته‌بندی مختلفی دارند؛ که برخی از آن‌ها را اشاره می‌کنیم.

۱) دنباله: دنباله‌ای که قانون کلی دارند که اعضای دنباله را می‌توان از آن قانون بدست آورد. به این قانون جمله عمومی دنباله می‌گویند.
(نویسند)

قابل ذکر است که دنباله را به عنوان تابع هم می‌توان در نظر گرفت که فاصله بین n جمله عمومی دنباله است و رابطه آن n (در حالت کلی) داشته می‌تواند مجموعه‌ای دیگر هم باشد.

۲) دنباله کراندار $\leftarrow$ دنباله (a_n) را کراندار گوئیم اگر $\exists m \in \mathbb{R}^+ ; \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| < m$
یعنی تمام جمله‌های دنباله در محدوده $(-m, m)$ برقرار هستند و m قرار بگیرند.

$\{ \dots, -1, -1, -1, -1, \dots \}$
جمله عمومی
جمله‌ها

مثال: دنباله $\{ (-1)^n \}_{n \geq 1}$ کراندار است چون اعضای دنباله عبارتند از

گزینه ۱ و ۲ در نظر بگیریم.

$\{ 2, 4, 8, 16, 32, \dots \}$

دنباله $\{ 2^n \}_{n \geq 1}$ کراندار نیست چون اعضای دنباله عبارتند از

که در هیچ محدوده‌ای قرار نمی‌گیرند.

۳) دنباله: دنباله $(a_n)_{n \geq 1}$ را صعودی (نزولی) گوئیم اگر $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$) باشد.
اینکه (صعودی یا نزولی) $\left\{ \begin{array}{l} \text{اینکه} \\ \text{غیر اینکه} \end{array} \right.$

مثال: دنباله $\{2^n\}_{n \geq 1}$ همگرا نیست، دنباله $\{(-1)^n\}_{n \geq 1}$ یکپارچگی و دنباله $\{\frac{1}{2^n}\}_{n \geq 1}$ همگرا نیست.

(۴) دنباله $\{a_n\}_{n \geq 1}$ را همگرا کنیم اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ موجود باشد
 اگر نه: اگر همگرا نباشد

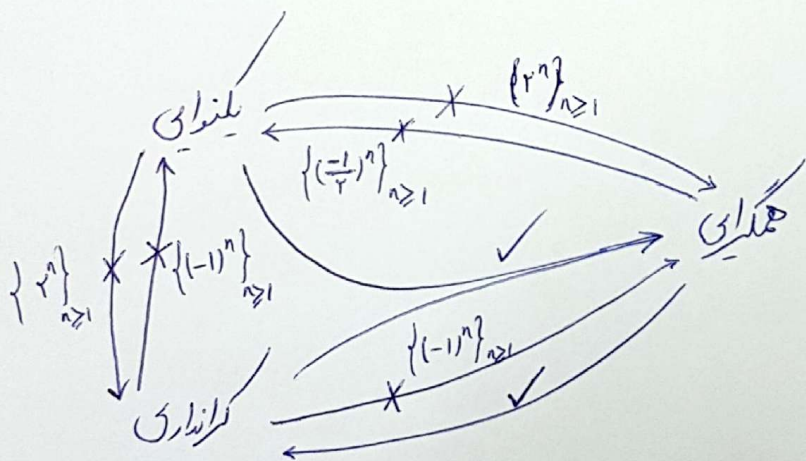
مثال: دنباله $\{2^n\}_{n \geq 1}$ همگرا نیست چون $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$

دنباله $\{\frac{1}{2^n}\}_{n \geq 1}$ همگرا نیست چون $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

دنباله $\{(-1)^n\}_{n \geq 1}$ همگرا نیست چون $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n$ وجود ندارد

معمولاً ما با دنباله یک رابطه داریم. حال سه ویژگی برای آنرا داریم که می‌توانیم با آن رابطه را بررسی کنیم.

نکته: دنباله $\{(-\frac{1}{2})^n\}_{n \geq 1}$ همگرا نیست چون $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{2})^n$ وجود ندارد



توضیح نمودار: $\begin{cases} \text{X} \rightarrow \text{یعنی نتیجه نمی‌دهد و مثال آن هم در فلش ذکر شده} \\ \checkmark \rightarrow \text{یعنی نتیجه می‌دهد} \end{cases}$

لذا هر دنباله همگرا، کرانه‌بندی و هر دنباله یکپارچه کرانه‌بندی همگراست.
 هر دو خاصیت بهم.

مثال: برای هر عددی مثبت r (کافیست حد بگیریم)

۱) $\left(\frac{r^n}{r^{n+1}}\right)_{n \geq 1}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r^n}{r^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r^n}{r^n} = \frac{r}{r}$ پس همگراست

۲) $\left(\frac{r^n - 1}{r^n + 1}\right)_{n \geq 1}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r^n - 1}{r^n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r^n}{r^n} = 1$ پس همگراست

۳) $\left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right\}_{n \geq 1}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$ پس همگراست
 (توجه: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$)

۴) $\left(\frac{n^r}{r^n}\right)_{n \geq 1}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^r}{r^n} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r^n}{r^n \ln r} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r}{r^n (\ln r)^r} = \frac{r}{\infty} = 0$ پس همگراست

۵) $\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{r}\right)\right\}_{n \geq 1}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{r}\right) =$ وجود ندارد پس همگرا نیست

۶) $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}_{n \geq 1}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$ (نیمه دنباله n زوج و n فرد) $\Rightarrow$ همگرا نیست $\Rightarrow$ پس همگرا نیست