

در این جلسه بحث آزمون را بر روی همگرای سری را داریم.

- تعریف: سری $\sum a_n$ را همگرا مطلق گوئیم، اگر $\sum |a_n|$ همگرا باشد و در غیر این صورت شرط گوئیم اگر $\sum a_n$ همگرا باشد ولی $\sum |a_n|$ همگرا نباشد و در این صورت $\sum |a_n|$ را همگرا نسبی می‌نامیم.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

یعنی هر که جمله a_n در سری مثبت، منفی باشند را در مقابل می‌نویسیم. مهم نیست اولین جمله مثبت است یا منفی.

- آزمون سری $\sum a_n$ متناوب: اگر $(a_n)_{n \geq 1}$ دنباله ایداً متناوب باشد و $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ باشد، آن گاه سری متناوب است. (شرط دارد)

مثال: ۱) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ سری متناوب است و در ضمن دنباله $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ متناوب است و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ لذا این سری متناوب است.

۲) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ سری متناوب است و دنباله $(\frac{1}{n^2})_{n \geq 1}$ متناوب است و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ لذا این سری متناوب است.

$$۳) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{[\frac{n}{2}]} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \dots$$

۴) سری $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ را همگرا شرط است. چون $\sum_{n=1}^{+\infty} |(-1)^n \frac{1}{n}| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ یک $p=1$ است که واگرا است. ولی خود $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ به قسمت (۱) مثال همگراست.

$$(5) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \text{ همگرا مطلق است؛ چون } \sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ یک } p=2 \text{ همگراست و عددی}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \text{ نیز بنابر تست (۲) همگراست.}$$

$$16 \text{ سطر } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{n^2} \text{ همگرا مطلق است؛ چون } \sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ یک } p=2 \text{ همگراست و عددی.}$$

آزمون نسبت: فرض کنید $\sum a_n$ یک سری به جهت نامفروض باشد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$ در این صورت اگر

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 0 \leq L < 1, \text{ سطر همگرا مطلق است.} \\ (2) \quad 1 < L \leq +\infty, \text{ سطر واگراست.} \end{array} \right\}$$

آزمون ریشه: فرض کنید $\sum a_n$ داشته باشیم $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ در این صورت اگر

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 0 \leq L < 1, \text{ سطر همگرا مطلق است.} \\ (2) \quad 1 < L \leq +\infty, \text{ سطر واگراست.} \end{array} \right\}$$

چند نکته: (۱) آزمون نسبت و ریشه، از قوی ترین آزمون های تشخیص همگرایی هستند.

(۲) اگر $L=1$ در آزمون نسبت یا ریشه، این آزمون کم جود. نمی دهند و باید از آزمون های دیگر استفاده کرد.

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^c} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{c} = 1, \quad c \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{چند مثال: (۱) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

$$a_n = \frac{1}{n!} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

لذا سری همگرا مطلق است.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\ln n)^n} \quad (3)$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(\ln n)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^{n-1}}{(\ln n)^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1$$

لذا طبق آزمون ریش، همگرا مطلق است.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^4} \quad (5)$$

$$a_n = \frac{2^n}{n^4}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{2^n}{n^4} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n}}{\sqrt[n]{n^4}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n^4}} = 2 > 1$$

لذا طبق آزمون ریش، همگرا مطلق است.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad (6)$$

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

لذا آزمون بی نتیجه است.

از قبل می دانیم که $\sum \frac{1}{n}$ یک $p=1$ همگرا نیست.

همانگونه که مثلاً مشخص است معمولاً زمانی که در جمله عمومی لگاریتم داشته باشیم و در آن نسبت می داریم زمانی که در جمله عمومی لگاریتم n داشته باشیم از آزمون ریش استفاده می کنیم.

سری توانی: چند جمله‌ای از درجه بی‌نهایت را می‌توان به صورت زیر ظاهر کرد

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \dots$$

نکته: که در مورد سری توانی مهم است فاصله همگرایی آن است. یعنی فاصله که اگر عدد را از آن انتخاب کنیم و بی‌نهایت x در آن سری توانی قرار دهیم حاصل هر عدد همگرایی شود.

برای بدست آوردن فاصله همگرایی یک سری از آن نسبت یا درجه استفاده می‌کنیم. به صورت زیر

مثال: فاصله همگرایی سری x توانی زیر را بیابید

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

دست می‌گیریم: $a_n = \frac{1}{n} x^n$: مورد

طبق آزمون نسبت $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n x^{n+1}}{(n+1) x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} |x| = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1}$

$$= |x|$$

طبق آزمون نسبت سری زمانی همگرایی که $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ باشد؛ لذا باید $|x| < 1$ باشد. پس سری توانی $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

برای $|x| < 1$ باشد همگرایی. آزمون نسبت در مورد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ بی‌نتیجه بود؛ لذا سعی می‌کنیم با آزمون دیگر

دیگر بررسی کنیم. یعنی همگرایی آزمون از $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ با در یک تری در هم نقطه به است آمده را در آن توانی گذاشته، برای آن عددی حاصل را از جهت همگرایی بررسی می‌کنیم. در این شکل داریم $|x| = 1$ (چون $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x|$) پس $x = 1$ یا $x = -1$.

پس در سری توانی یکبار قرار می دهیم $x=1$ داریم

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \xrightarrow{x=1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

که یک سری دوارگ است $p=1$ - سری دوارگ است

در نهم بعد $x=-1$ را قرار می دهیم

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \xrightarrow{x=-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

که یک سری متناوب است
طبق مثال ۴ ص ۱۸ همگرایی

پس سری توانی دارم که برای $|x| < 1$ و $x = -1$ همگرایی؛ لذا فاصله همگرایی آن $(-1, 1)$ است. بدین معنی که هر عدد از بازه $(-1, 1)$ را در سری توانی $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ قرار دهیم حاصل سری عدد همگرایی می شود و هر عدد خارج از این بازه سری را دوارگ می کند.

۲) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}$

چون $a_n := \frac{x^n}{2^n}$

آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{2^n}\right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x}{2}\right|^n} = \left|\frac{x}{2}\right|$

حال برای بدست آوردن فاصله همگرایی نباید از روش جداسازی $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ استفاده کنیم زیرا داریم

$$\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \Rightarrow \frac{|x|}{2} < 1 \Rightarrow |x| < 2$$

لذا بازه همگرایی x ای است که $|x| < 2$.

حال تا در $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ را بررسی کنیم. لذا داریم $\left|\frac{x}{2}\right| = 1$ و در نتیجه $|x| = 2$ پس $x = 2$ یا $x = -2$.

برای $x=2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} \xrightarrow{x=2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 1$ دوارگ است
چون جمله عمومی آن است و محدود در بینهایت نمیگردد

برای $x=-2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} \xrightarrow{x=-2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ دوارگ است
(چون جمله عمومی $(-1)^n$ است و محدود در بینهایت نمیگردد)
پس بازه همگرایی آن $(-2, 2)$ است.

$$۳) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$a_n := \frac{x^n}{n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n! x^{n+1}}{(n+1)! x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{n+1} =$$

$$= |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = |x| \cdot 0 = 0 < 1$$

چون $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0 < 1$ است؛ لذا بر هر x ، $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ همگراست (طبق آزمون نسبت).
پس دامنه همگرایی آن $\mathbb{R}$ می باشد.

$$۴) \sum_{n=1}^{+\infty} n^n x^n$$

$$a_n := n^n x^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|n^n x^n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|n x|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} |n x| = \lim_{n \rightarrow +\infty} n |x|$$

$$= |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} n$$

$$\begin{cases} \text{اگر } x \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} n = |x| \cdot \infty = \infty & \text{واحد است} \\ \text{اگر } x = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|n x|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 < 1 & \text{همگراست} \end{cases}$$

لذا این سری فقط برای $x=0$ همگراست و دامنه همگرایی $\{0\}$ است.

نکته: دامنه همگرایی این سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ بازه به شکل $(-R, R)$ یا $[-R, R]$ یا $(-R, R]$ یا $[-R, R)$ است.

مثلاً در مثال ۱، بازه همگرایی $(-1, 1)$ است.

در مثال ۲، $(-2, 2)$ است.

در مثال ۳، $(-\infty, +\infty)$ است.

در مثال ۴، $\{0\}$ است.

برای آن توانی کار بردار فاکتوری دارند و می توان بر هر جایی که توانی آن را داشت و از آن برای محاسبه و ترتیب استفاده کرد که بدلیل نموده این آن می گذرم.

$$\infty) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n+1}$$

$$a_n := (-1)^n \frac{x^{2n}}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{n+2}}{(-1)^n \frac{x^{2n}}{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1) x^{2n+2}}{(n+2) x^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} x^2 \right)$$

$$= x^2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right) = x^2 \cdot 1 = x^2$$

حال برای هر x که $|x| < 1$ باشد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ و از آنجا که $|x| < 1$ یعنی $x^2 < 1$

$$\Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow x \in (-1, 1)$$

حال $x = 1$ و $x = -1$ را جداگانه بررسی کنیم

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n+1} \xrightarrow{x=1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$$

سری متناوب است که طبق آزمون لایبنتی همگراست

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n+1} \xrightarrow{x=-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-1)^{2n}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$$

سری متناوب و همگراست

پس در همه موارد، بازه $[-1, 1]$ است.

مسائل

همگرایی سریهای داده شده را با آزمون نسبت یا آزمون ریشه تحقیق کنید. اگر هر دو آزمون بی حاصل بود، از آزمون همگرایی دیگر استفاده نمایید. در سریهای با جملات مثبت و منفی بین همگرایی مطلق و شرطی را از هم تمیز دهید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n-1)!} \quad .1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^{100}} \quad .2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n^2} \quad .3$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n} \quad .4$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^n}{(2n)!} \quad .5$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^n \quad .6$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{5^n} \quad .7$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4n^2-1}{(1.01)^n} \quad .8$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}} \quad .9$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4/9}}{3^n} \quad .10$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \left(\frac{19}{7} \right)^n \quad .11$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \quad .12$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{4^n} \quad .13$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(-3)^n}{(2n+1)!} \quad .14$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{n/2}}{n\pi^n} \quad .15$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)^n}{(n+1)^{n+1}} \quad .16$$

مسائل

شعاع همگرایی و بازه همگرایی سری توانی داده شده را بیابید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1} \quad . ۲$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x - \pi)^n \quad . ۱$$

دنباله‌ها و

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n} \quad . ۴$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}} \quad . ۳$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)^{3/2}} \quad . ۶$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+7)^n}{n!} \quad . ۵$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} (x+5)^n \quad . ۸$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n!} \quad . ۷$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{\ln n} x^n \quad . ۱۰$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n \quad . ۹$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!(n+4)!} x^n \quad . ۱۲$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^{n^2} x^n \quad (0 < c < 1) \quad . ۱۱$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n+1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n+1)} x^{2n} \quad . ۱۳$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} (x-3)^n \quad . ۱۴$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n} \quad . ۱۶$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{n^2} (x+e)^n \quad . ۱۵$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} \quad (a > 0, b > 0) \quad . ۱۷$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^n}{n} + \frac{2^n}{n^2} \right) x^n \quad . ۱۹$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} x^n \quad . ۱۸$$