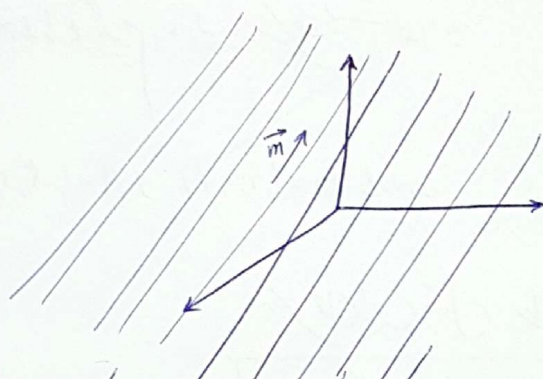


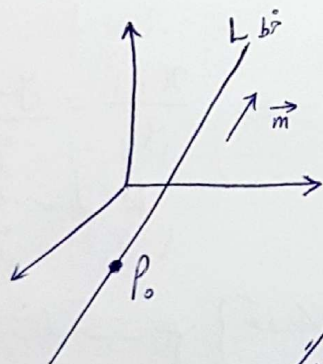
خط در فضا:

می دانیم معادله خط در فضا $y = mx + b$ یا به شکل کلی $ax + by + c = 0$ است. حال به بررسی معادله خط در فضا و حالت مختلف آن می پردازیم.

خط مکان هندسی (مجموعه) نقاطی از فضا است که همه در یک راستا باشند. بر حسب آن معادله یک خط در فضا به راستی آن نیاز داریم. لذا این راستا را به کمک یک بردار در فضا به دست می آوریم (بردار هم راستا با خط). علاوه بر آن به نیاز به یک نقطه در فضا داریم که به هم راستا را یک بی تعیین کند. شکل زیر



برای تشخیص جهت در فضا معادله بردار m که در آن راستی خط (که به آن بردار هم راستا می گویند) به یک نقطه از خط نیز نیاز داریم. پس برای تشخیص جهت در فضا به یک خط در فضا به بردار هم راستا (بردار هم راستا) و نقطه از خط (نقطه از خط) نیاز داریم. حال اگر $m = (a, b, c)$ بردار هم راستا با خط باشد که این خط از نقطه $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ می گذرد، آن گاه معادله خط L به گونه ای است که



$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (1)$$

که به آن معادله متجانس خط گویند (با فرض غیر صفر بودن a, b, c)

$$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad (2)$$

که به آن معادله پارامتریک خط گویند

در حالت اول، اگر یکی از a, b, c صفر بود مثلاً $a = 0$ می نویسیم $x = x_0, \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$.
در حالت دوم، اگر دو تا از a, b, c صفر بود مثلاً $a = b = 0$ می نویسیم $x = x_0, y = y_0, z = z_0$.
تغییر معادله خط را به شکل متجانس نمی نویسیم و فقط به شکل پارامتریک می نویسیم.
تغییر a, b, c هر سه به هم صفر نمی توانند باشند.

پسند مثال: معادله خط را در حالت زیر بنویسید.

۱) $\vec{m} = (11, 8, 10)$ بردار جهت
نقطه $P_0 = (1, 12, 6)$ روی خط

معادله پارامتری

$$\begin{cases} x = 11t + 1 \\ y = 8t + 12 \\ z = 10t + 6 \end{cases}$$

معادله متناهی

$$\frac{x-1}{11} = \frac{y-12}{8} = \frac{z-6}{10}$$

نکته: هرگاه از معادله خط را که در دست داریم (همچون معادله پارامتری) دیگر راهی توانیم بیابیم یا خیر؟
با حذف t (یا به عبارت دیگر t از معادله پارامتری خط، معادله متناهی بدست می آید و اگرست در معادله متناهی خط را t بگیریم، معادله پارامتری خط بدست می آید.

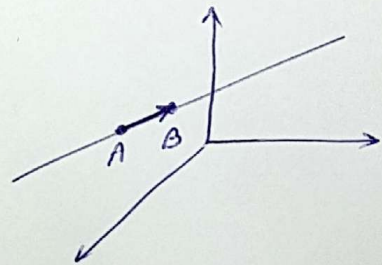
۲) خط گذرا از دو نقطه $A = (-2, 2, 4)$ و $B = (9, 1, 2)$ را بیابید.

برای حل این مثال، بردار جهت خط را بردار $\vec{AB}$ یا $\vec{BA}$ می گیریم

می دانیم اگر

$$\begin{cases} A = (x_a, y_a, z_a) \\ B = (x_b, y_b, z_b) \end{cases}$$

$$\vec{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a)$$



$\Rightarrow \vec{AB} = (9, -1, -2)$

این بردار جهت است

$\vec{m} = (9, -1, -2)$

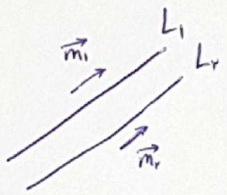
$A = (-2, 2, 4)$

$\Rightarrow \frac{x+2}{9} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{-2}$
معادله متناهی خط

وضعیت نقطه و خط نسبت بهم: $\left. \begin{array}{l} \text{نقطه روی خط قرار دارد: کافیت چک کنیم آیا مختصات نقطه در معادله خط صدق می کند یا نه.} \\ \text{نقطه روی خط نیست.} \end{array} \right\}$

مثال: آیا نقاط $A=(1,0,0)$, $B=(2,2,3)$ در خط $z=3, y-2=x-1$ قرار دارند؟
 مسلماً A صدق نمی‌کند ولی B صدق می‌کند.

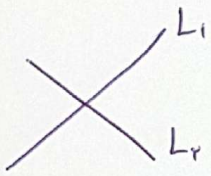
وضعیت دو خط نسبت به هم در فضا:



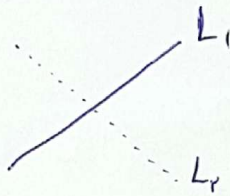
(۱) موازی: کافیت برابر m_1 در آن موازی باشند. یادآور می‌کنم دو بردار موازی اند اگر نسبتی از هم باشند.



(۲) منطبق: موازی بوده و در یک نقطه مشترک باشند.



(۳) متقاطع: کافیت معادله پارامتریکی را در معادله متعارف دیگر قرار دهید و جواب یک برداشت آورید.



(۴) متنافر: اگر جوابات پاسخ ندهند.

از نظر هندسی در فضای سه بعدی
 از دو خط هم برد تقاطع عبوری کنند

مثال: وضعیت خطوط زیر را نسبت به هم بررسی نمایید.

$$L_1: \frac{x-1}{2} = y-2 = z$$

$$L_2: \frac{x}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$$

$$L_3: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = z-1$$

$$L_4: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = z + \frac{1}{2}$$

حل:

اعداد خارج کسره مرتب $\vec{m}_1 = (2, 1, 1)$ برابر L_1

$$\vec{m}_2 = (4, 2, 2)$$

$$\vec{m}_3 = (2, 2, 1)$$

$$\vec{m}_4 = (2, 2, 1)$$

$$\vec{m}_2 = 2\vec{m}_1 \Rightarrow \vec{m}_1 \parallel \vec{m}_2 \Rightarrow L_1 \parallel L_2$$

$\vec{m}_3$ و $\vec{m}_1$ هم‌جهت یکدیگر نیستند لذا موازی یا منطبق نیستند L_3 و L_1

L_4 و L_2 موازی هستند نقطه $(1, 2, 0)$ از L_1 را در L_2 بررسی کنیم

$$\frac{1}{4} \neq \frac{2-2}{2} = 0 \quad \text{لذا } L_4 \text{ و } L_2 \text{ منطبق نیستند}$$

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = t+1 \end{cases}$$

معادله پارامتریک خط L_2

در معادله متناهی L_1 قرار می دهیم -

$$\frac{2t-1}{2} = 2t-2 = t+1$$

حل نمائید

حل نمائید $t=3$

$$2t-1 = 4t-4$$

$$2t = 3$$

$$t = \frac{3}{2}$$

ملاحظه فرمائید پس L_1 و L_2 متقاطع نمی باشند لذا موازی نمی شوند

$\vec{m}_1$ و $\vec{m}_2$ هم موازی نیستند؛ لذا موازی یا هم‌خط نمی باشند. متقاطع بود را بررسی کنیم

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = t - \frac{1}{2} \end{cases}$$

معادله پارامتریک خط L_3 :

در معادله متناهی L_1 قرار می دهیم -

$$\frac{2t-1}{2} = 2t-2 = t - \frac{1}{2}$$

حل نمائید

حل نمائید $t = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$$2t-1 = 4t-4$$

$$2t = 3$$

$$t = \frac{3}{2}$$

پس L_1 و L_3 متقاطع هستند

برای پیدا کردن نقطه برخورد t به دست آمده را در معادله پارامتریک L_1 قرار می دهیم -

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

یعنی L_1 و L_3 در نقطه $(3, 3, 2)$ در فضا با هم برخورد می کنند.

فرمول فاصله نقطه $P=(x_1, y_1, z_1)$ از خط $L: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ عبارت از

$$d = \frac{|\vec{m} \times \vec{P_0P}|}{|\vec{m}|}$$

$\vec{m} = (a, b, c)$ بردار در خط L

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ نقطه در خط L

$$\vec{P_0P} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

مثال: فاصله نقطه $P=(1, 0, 1)$ را محاسبه کنید. $L: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = z$ را بیابید.

$$\vec{m} = (2, -1, 1) \Rightarrow |\vec{m}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}, \quad P_0 = (0, 2, 0) \Rightarrow \vec{P_0P} = (1, -2, 1)$$

$$\vec{m} \times \vec{P_0P} = (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \times (\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) = \dots = \vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k} \Rightarrow |\vec{m} \times \vec{P_0P}| = \sqrt{11} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}$$

فاصله دو خط L و L' از هم:

(۱) اگر دو خط متقاطع یا همخط باشند، فاصله آنها صفر است.

(۲) اگر دو خط موازی باشند؛ گاه فاصله نقطه دلخواه از خط L تا خط L' ثابت آوریم.

(۳) اگر دو خط متقاطع باشند؛ به نظر شما این فاصله چگونه ثابت می‌آوریم (یا در صورتی که نمی‌توانیم ثابت می‌آوریم که چرا نمی‌توانیم ثابت می‌آوریم).

مثال: فاصله خطوط مثال ۳ را بیابید.

$$\vec{m}_1 = (2, 1, 1) \text{ بردار در } L_1$$

$$P_1 = (1, 2, 0) \text{ نقطه در } L_1$$

L_1 با L_2 موازی بود لذا نقطه $P_2 = (0, 2, 0)$ را از L_2 در نظر می‌گیریم. در خط L_2 داریم

$$\vec{P_1P_2} = (-1, 0, 0)$$

$$\vec{m}_1 \times \vec{P_1P_2} = (2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \times (-\vec{i}) = \vec{k} - \vec{j} \Rightarrow |\vec{m}_1 \times \vec{P_1P_2}| = \sqrt{2}, \quad |\vec{m}_1| = \sqrt{6}$$

برای نتیجه قبلی

$$\text{لذا فاصله } L_1 \text{ تا } L_2, \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \text{ است.}$$

L_1 با L_2 متقاطع هستند و چون فاصله آنها صفر است می‌توانیم

L_1 و L_2 متقاطع هستند، لذا فاصله آنها صفر است.

صفحه در فضا:

صفحه را می توان خط در فضا در نظر گرفت که از دو طرف کشیده شده باشد. برابر بدست آوردن معادله یک صفحه در فضا به برقرار نمودن یک صفحه نیاز داریم که بدان برقرار نمودن صفحه کوئیم و برابر صفحه نیز از صفحه نیز نیاز داریم.

معادله صفحه را با برقرار نمودن $\vec{n} = (a, b, c)$ و گذرا از نقطه $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ عبارت از

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

یا

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$

یا

$$ax + by + cz + d = 0$$

که در آن $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$ عبارت

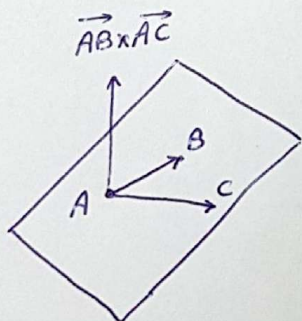
مثال: (۱) معادله صفحه را شامل نقطه $(2, 1, 3)$ و برقرار قائم $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ را بیابید.

$$4(x - 2) - 4(y - 1) + 1(z - 3) = 0$$

حل:

$$\Rightarrow 4x - 4y + z = 5$$

(۲) معادله صفحه را شامل سه نقطه $A = (1, 2, 0)$ ، $B = (1, 0, 1)$ و $C = (-1, 1, 1)$ را بیابید.



برای نوشتن معادله صفحه به برقرار نمودن آن نیاز داریم. بر این شکل بود

کلانیت برقرار $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ را تشکیل دهیم. بر این مقدمه فیه خوبی

برقرار $\vec{AB} \times \vec{AC}$ برقرار $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ عمود است. از آن جایی که

نقطه A ، B و C در صفحه قرار دارند لذا برقرار $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ نیز در صفحه هستند پس

برقرار $\vec{AB} \times \vec{AC}$ بر صفحه عمود است و همین برقرار را به عنوان برقرار عمود صفحه در نظر می گیریم. پس داریم:

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= (0, -2, 1) \\ \vec{AC} &= (-2, -1, 1) \Rightarrow \vec{AB} \times \vec{AC} = (-2\vec{j} + \vec{k}) \times (-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = \dots = -\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k} \\ &= (-1, -2, -4)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{بردار نرمال همگرا} \quad \vec{n} = (-1, -2, -4)$$

گازیت یک نقطه در خواست از این
را هم در نظر بگیریم

$$A = (1, 2, 0)$$

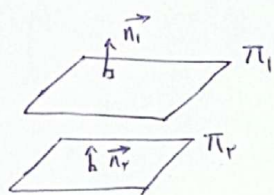
معادله

$$-1(x-1) - 2(y-2) - 4(z-0) = 0$$

$$\Rightarrow -x - 2y - 4z = -5$$

$$\Rightarrow x + 2y + 4z = 5$$

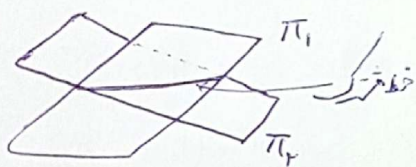
وضعیت دو صفحه نسبت به هم:



۱) موازی: گازیت بردار نرمال آنها موازی باشند

۲) منطبق: گازیت موازی بوده و در یک نقطه مشترک باشند

۳) متقاطع: اگر حاد (۱) و (۲) رخ ندهند قطعاً دو صفحه متقاطع بوده و ناحیه مشترک آنها (کل برخورد آنها) یک خط است



مثال: وضعیت صفحه نسبت به هم بررسی کنید

$$\pi_1: x - y + 2z = 3$$

$$\pi_2: 3x - 6y + z = 1$$

$$\pi_3: -x + y - 2z = 10$$

$$\pi_4: 2x - 3y + 4z = 9$$

$\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$ همبسته از هم نیستند لذا $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$. پس π_1 و π_2 موازی

یا منطبق نمی باشند. پس قطعاً متقاطع هستند.

حال برای دیدن آوردن خط مشترک بین π_1 و π_2 به صورت زیر عمل می کنیم.

$$\vec{n}_1 = (1, -1, 2)$$

$$\vec{n}_2 = (3, -6, 1)$$

حالت
داریم
-

بردار داشتن خط به بردار دیگر دیک نقطه از آن نیاز داریم.

۱- $\vec{m} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ بردار خط فعل مشترک دو صفحه از فریب خارجی بردار هر دو را در هم ضرب می‌داریم.

۲- بردار جهت آوردن نقطه از این خط به شکل زیر عمل می‌کنیم.

$$\pi_1: x - y + 2z = 3$$

$$\pi_2: 2x - 4y + z = 1$$

مثلاً $z=0$

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x - 4y = 9 \\ -4x - 4y = 1 \end{cases}$$

$$+4y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{4} \quad (*) \Rightarrow x = \frac{13}{4} \Rightarrow P = (\frac{13}{4}, \frac{1}{4}, 0) \text{ نقطه در خط}$$

(۱) به یکی از متغیرهای x, y یا z مقدار دلخواه که معمولاً صفر است می‌دهیم و بعد دستگاه را حل می‌کنیم.
(۲) نقطه بدست آمده، همان نقطه در نظر است.

$$\vec{n}_1 = (1, -1, 2)$$

$$\vec{n}_2 = (2, -4, 1)$$

$$\Rightarrow \vec{m} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) \times (2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}) = \dots = 11\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k} \\ \Rightarrow \vec{m} = (11, 5, -2)$$

حل بدست شدن بردار خط و نقطه از آن معادله خط فعل مشترک یعنی π_1 و π_2 را می‌گیریم.

$$\vec{m} = (11, 5, -2)$$

$$P = (\frac{13}{4}, \frac{1}{4}, 0)$$

$$\frac{x - \frac{13}{4}}{11} = \frac{y - \frac{1}{4}}{5} = \frac{z}{-2} = t \quad \begin{cases} x = 11t + \frac{13}{4} \\ y = 5t + \frac{1}{4} \\ z = -2t \end{cases}$$

$$\pi_1 \parallel \pi_3$$

$$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_3$$

$$\vec{n}_3 = -\vec{n}_1$$

$$\vec{n}_3 = -\vec{n}_1$$

$$\vec{n}_3 = -\vec{n}_1$$

$$\vec{n}_3 = -\vec{n}_1$$

$$\vec{n}_3 = -\vec{n}_1$$

$$\vec{n}_3 = -\vec{n}_1$$

$$\vec{n}_3 = -\vec{n}_1$$

یعنی دو صفحه π_1 و π_3 موازی‌اند.

حال احتمال خطی بودن آن را بررسی می‌کنیم.

برای بدست آوردن نقطه دلخواه از یک صفحه، کافیست به دو متغیرهای x, y و z عدد دلخواه (معمولاً صفر) بدهیم و یکی را

از صفر بدهیم و بدست می‌آوریم.

$$\pi_1: x-y+z=2$$

$$\pi_3: -x+y-2z=1$$

نقطه را در صفحه π_1 انتخاب می کنیم

تاریخ دهیم $y=z=0$ و لذا در صفحه π_1 داریم $x=2$.

حال نقطه $(2, 0, 0)$ را در صفحه π_3 قرار دهیم و بررسی می کنیم که صدق کند
دو صفحه متوازی خنثی می شوند و در غیر این صورت متوازی نمی باشند

$$-2+0-0 \stackrel{?}{=} 1$$

$$-2 \neq 1$$

پس دو صفحه π_1 و π_3 متوازی و غیر منطبق هستند.

داشتیم $\vec{n}_1 = (1, -1, 2)$ لذا $\vec{n}_3 = 3\vec{n}_1$ در نتیجه $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_3$ پس $\pi_1 \parallel \pi_3$

یعنی دو صفحه π_1 و π_3 متوازی هستند.

حال احتمال انطباق آن را بررسی می کنیم.

$$\pi_1: x-y+z=2 \xrightarrow{\text{نقطه را در}} y=z=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow (2, 0, 0)$$

$$\pi_3: 3x-3y+6z=9 \xrightarrow{\text{نقطه را در}} 3(2)-3(0)+6(0) \stackrel{?}{=} 9$$

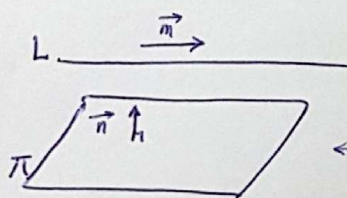
$$9=9 \checkmark$$

پس دو صفحه π_1 و π_3 خنثی هستند.

زاویه بین دو صفحه و در خط:

زاویه بین دو صفحه همان زاویه بین بردار نرمال آن است و زاویه بین دو خط همان زاویه بین بردار آن است.

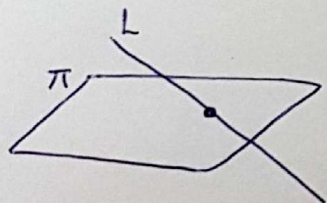
وضعیت یک خط و یک صفحه نسبت به هم:



۱ خط مدازی صفحه: کافیست بردار از خط بر بردار نرمال صفحه عمود باشد

۲ خط منطبق در صفحه: کافیست بردار از خط در صفحه باشد

۳ خط در صفحه متقاطع: اگر حالات (۱) و (۲) رخ ندهند که در این صورت محل برخورد آن یک نقطه است.



مثال: ~~دو صفحه~~ ~~خط~~ ~~زیر~~ ~~را~~ ~~بیت~~ ~~بر~~ ~~صفحه~~ ~~π~~ ~~بر~~ ~~یک~~ ~~نقطه~~ ~~آید~~
 وصفیت خط زیر را نسبت به صفحه π بررسی کنید.

$$\pi: x - 2y + 3z = 10$$

$$L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-4} = \frac{z+7}{6}$$

$$L_2: \frac{x-7}{-3} = \frac{y}{6} = \frac{z-1}{+5}$$

$$L_3: \frac{x+7}{3} = y, z=4$$

حل:

داریم: $\vec{n} = (1, -2, 3)$ بردار نرمال صفحه.

$\vec{m}_1 = (2, -4, 6)$ بردار خط / خط L_1

$\vec{m}_2 = (-3, 6, 5)$

$\vec{m}_3 = (7, 1, 0)$

$$\vec{n} \cdot \vec{m}_1 = (1, -2, 3) \cdot (2, -4, 6) = 2 + 8 + 18 \neq 0 \Rightarrow \vec{n} \not\perp \vec{m}_1$$

لذا خط L_1 در صفحه π موازی یا منطبق نیستند لذا قطع هستند.

نکته: برای بدست آوردن نقطه برخورد خط و صفحه، معادله پارامتر خط را در معادله صفحه قرار می دهیم.

L_1 پارامتر: $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -4t \\ z = 6t - 7 \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری در صفحه } \pi} (2t+1) - 2(-4t) + 3(6t-7) = 10$

$$2t + 1 + 8t + 18t - 21 = 10$$

$$21t = 40 \Rightarrow t = \frac{40}{21}$$

در معادله پارامتر خط قرار می دهیم نقطه بدست می آید.

نقطه برخورد خط L_1 و صفحه π: $\begin{cases} x = \frac{40}{21} + 1 \\ y = -\frac{40}{21} \\ z = \frac{90}{21} - 7 \end{cases}$

$$\vec{n} \cdot \vec{m}_2 = (1, -2, 3) \cdot (-3, 6, 5) = -3 - 12 + 15 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{m}_2 \Rightarrow$$

خط L_2 در صفحه π موازی هستند. حال احتمال منطبق بودن را بررسی کنیم.

$(7, 0, 1)$ نقطه روی خط L_2 $\xrightarrow{\text{جایگذاری در صفحه } \pi} (7) - 2(0) + 3(1) \stackrel{?}{=} 10 \Rightarrow 10 = 10 \checkmark$

پس خط L_2 در صفحه π قرار دارد و لذا منطبق هستند.

$$\vec{n} \cdot \vec{m}_\pi = (1, -2, 4) \cdot (2, 1, 0) = 2 - 2 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{m}_\pi$$

لذا خط L_π و صفحه π موازی هستند. برابر احتمال منطبق نیست:

$$\begin{array}{c} \text{خط } L_\pi \text{ روی نقطه } (-7, 0, 4) \\ \xrightarrow{\text{برای در صفحه } \pi} \end{array} \quad (-7) - 2(0) + 4(4) \stackrel{?}{=} 10$$

$$-7 + 12 \stackrel{?}{=} 10$$

$$5 \neq 10$$

لذا خط L_π و صفحه π موازی هستند و هم منطبق نیستند.

(تعیین موارد و نکات در مورد خط ها و درجیه آینه)