

در این جلسه مفهومی که برای این دوره و مورد برادر قرار می دهیم.

مجموع نام اعشاری یک دنباله نامتناهی را می گویند. یعنی برای دنباله $\{a_n\}_{n \geq 1}$ ، اگر عبارت از $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ که بطور خلاصه آن را با $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ نمایش می دهیم.

مسئله اصلی که در این سطح است اینست که آیا یک سری همگرایی دارد یا نه. اگر این مجموعه عددی را هم در دو طرف این سری قرار دهیم. راهکار ما فاکتوریل است. همگرایی یا واگرایی یک سری وجود دارد که بدلیل فاکتوریل به طور خلاصه کار با این سری آسان تر می کنیم.

- آزمون اول: اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ همگرایی داشته باشد، آن گاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

از این آزمون به این شکل استفاده می کنیم که اگر جمله عمومی a_n صفر نشود؛ سری قطعاً واگرایی.

توجه کنید، که اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ لزوماً نتیجه نمی دهد که $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ همگرایی؛ در برخی موارد واگرایی.

- آزمون سری هندسی: برای اعداد a و r ، سری $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n$ را می هندسی می نامند و این سری زمانی همگرایی که $|r| < 1$ باشد.

نابت می شود در این صورت $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$.

مثال: (۱) $\sum_{n=0}^{+\infty} n$ یا $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n$ یا $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ واگرایی دارند چون جمله عمومی آن صفر نیست.

(۲) $\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{2})^n$ همگرایی دارد و $a=1$ و $r=\frac{1}{2}$ چون $|r| < 1$ لذا همگرایی. مقدار همگرایی آن هم عبارت از

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

(۳) $\sum_{n=0}^{+\infty} (5^n \times 7)$ همگرایی ندارد که $a=7$ و $r=5$ چون $|r| > 1$ ، لذا واگرایی.

سری $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ را می نامند که $a_n \geq 0$ و $a_n > 0$ ، $n \geq 1$ و $a_n > 0$ ، $n \geq 1$ باشد.

- سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ را یک p -سری گوئیم و ثابت می‌شود یک p -سری برای $p > 1$ همگرا و برای $p \leq 1$ واگراست.

- ثابت می‌شود $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- آزمون مقایسه: فرض کنید $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دو سری نامتناهی باشند که $a_n \leq b_n$ (برای n از یک جابجیه) در این صورت

(۱) اگر $\sum b_n$ همگرا باشد؛ آنگاه $\sum a_n$ نیز همگراست.

(۲) اگر $\sum a_n$ واگرا باشد؛ آنگاه $\sum b_n$ نیز واگراست.

مثال: همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} , \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} , \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

حل: بنابر آزمون p -سری می‌دانیم $\sum \frac{1}{n^2}$ همگراست. چون $p=2 > 1$. از طرف دیگر برای هر n داریم $n^2 \leq n(n+1)$ و لذا برای هر n ، $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$. در نتیجه بنابر آزمون مقایسه و آنجا جایی که $\sum \frac{1}{n^2}$ همگراست، نتیجه می‌گیریم

$\sum \frac{1}{n(n+1)}$ نیز همگراست.

حل برای سری دوم: $\sum \frac{1}{2^n}$ بنابر همگرا بودن (مثال ۱ ص ۱) همگراست. از طرف دیگر برای هر n می‌توانیم که

$$n \geq 4 \Rightarrow 2^n < n!$$

$$\cdot \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^n} \quad \text{پس برای } n \geq 4 \text{ داریم}$$

لذا بنابر آزمون مقایسه $\sum \frac{1}{n!}$ همگراست.

حال برای سری سوم، $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ بنابر p -سری بودن و اینکه $p=1$ واگراست.

نکته: حذف یا افزودن کردن تعداد متناهی جمله به یک سری، تأثیری در همگرایی یا واگرایی سری ایفا نمی‌کند.

آزمون مقایسه‌ای: فرض کنید $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دو سری مثبت باشند به طوری که

۱) اگر $0 < L < \infty$ ، آن گاه $\left\{ \begin{array}{l} \text{همگرای } \sum b_n, \text{ همگرای } \sum a_n \text{ را نتیجه می‌دهد} \\ \text{واگرایی } \sum a_n, \text{ واگرایی } \sum b_n \text{ را نتیجه می‌دهد} \end{array} \right.$

۲) اگر $0 < L \leq +\infty$ ، آن گاه $\left\{ \begin{array}{l} \text{همگرای } \sum a_n, \text{ همگرای } \sum b_n \text{ را نتیجه می‌دهد} \\ \text{واگرایی } \sum b_n, \text{ واگرایی } \sum a_n \text{ را نتیجه می‌دهد} \end{array} \right.$ $\hookrightarrow$ لذا برای $L > 0$ ، دو سری یا همگرا هستند یا هر دو واگر

مثال: همگرای یا واگرایی $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$ را برآورد کنید.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + \frac{1}{n}), \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - n}$$

حل: می‌دانیم $\sum \frac{1}{n^2}$ متناهی $p=2$ نیز برین همگرایی از طرف دیگر داریم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2 - n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1 > 0$$

لذا بنا به آزمون مقایسه‌ای $\sum \ln(1 + \frac{1}{n})$ نیز همگراست.

می‌دانیم $\sum \frac{1}{n}$ متناهی $p=1$ نیز برین واگرایی داریم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{0}{0} \stackrel{\text{هسپیتال}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-1/n^2}{1 + \frac{1}{n}}}{\frac{-1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1 > 0$$

لذا بنا به آزمون مقایسه‌ای $\sum \frac{1}{n}$ واگرایی، نتیجه می‌گیریم $\sum \ln(1 + \frac{1}{n})$ نیز واگرایی.

مشکل اصلی آزمون مقایسه و معیاره همگرا این است که برای بررسی همگرایی یا واگرایی یک سری باید در ابتدا همگرایی یا واگرایی آن را به ندرت حدس بزنیم و بعد برای هر حدس یک معیار جهت مقایسه با سری اصلی انتخاب کنیم. تازه همانی بود در شرایط آزمون هم خود کندار دیگر است. با این وجود مسأله آزمون مقایسه همگرا، نسبت به آزمون مقایسه همگرا استفا و معیاره همگرا است چنان دیگر احتیاجی به اثبات وجود شرط $a_n \leq b_n$ نیست.

آزمون انتگرال: فرض کنید p_n بر $(\gamma, +\infty)$ تابعی نزول و پیوسته باشد و مثبت باشد و برای هر $n \geq 1$ ، $a_n = p(n)$.
در این صورت $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ همگراست اگر و تنها اگر $\int_{\gamma}^{+\infty} p(x) dx$ همگرا باشد.

مثال: همگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n (\ln n)^2}$$

حل: برای $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ از تعریف می‌کنیم $p(n) = \frac{1}{n \ln n}$ که برای $n \in (\gamma, +\infty)$ نزول و پیوسته و مثبت است.

$$\left(p'(n) = \frac{-\ln n - 1}{(n \ln n)^2} < 0 \right)$$

$$\int_{\gamma}^{+\infty} p(x) dx = \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{\gamma}^u \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\ln(\ln x) \right]_{\gamma}^u = \lim_{u \rightarrow +\infty} (\ln(\ln u) - \ln(\ln \gamma))$$

$$= +\infty$$

واحد
دارد

$$\boxed{\int \frac{1}{x \ln x} dx \stackrel{u = \ln x}{=} \int \frac{1}{u} du = \ln u = \ln(\ln x) \quad du = \frac{1}{x} dx}$$

پس $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ نیز واگرا است.

$\sum_{n=r}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^r}$ $\rightarrow$ $\int_{-}^{+}$ $\rightarrow$ $p(x) = \frac{1}{x(\ln x)^r}$ $\rightarrow$ $\int_{r}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^r} dx$ $\rightarrow$ $\int_{r}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^r} dx$

$$p'(x) = \frac{-(\ln x)^r - \ln x}{x^2(\ln x)^r} < 0$$

$$\int_{-}^{+}$$

$$\int_r^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^r} dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_r^u \frac{1}{x(\ln x)^r} dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_r^u = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\ln u} + \frac{1}{\ln r} \right) = \frac{1}{\ln r}$$

پس همگراست.

$$\left(\frac{1}{x(\ln x)^r} dx \xrightarrow[u=\ln x]{du=\frac{1}{x} dx} \int \frac{du}{u^r} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{\ln x} \right)$$

$\sum_{n=r}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^r}$ $\rightarrow$ $\int_{r}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^r} dx$ $\rightarrow$ $\int_{r}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^r} dx$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n(n+1)}} \cdot 12$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n-3} \cdot 11$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin n}{n^2} \cdot 14$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+2)}} \cdot 13$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \cdot 16$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)(n+4)} \cdot 15$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^4 - n^2 + 1}{5n^6 - n^3 - 2} \cdot 18$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}} \cdot 17$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{3^n - 1} \cdot 20$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \cdot 19$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)(n+4)}} \cdot 22$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}} \cdot 21$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{100n - 99} \cdot 24$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nc^n} \quad (c > 1) \cdot 23$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot 26$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \cdot 25$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n} \cdot 28$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \cdot 27$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2 - 5} \cdot 30$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \cdot 29$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{(\sqrt{n} + 1)^3} \cdot 32$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech} n \cdot 31$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + c^n} \quad (c > 0) \cdot 34$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \cdot 33$$

با استفاده از آزمون انتگرال (قضیه ۷)، معین کنید که سری داده شده همگراست یا واگرا.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-2}} \quad . ۳۶$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \quad . ۳۵$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1} \quad . ۳۸$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \quad . ۳۷$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2 - 3} \cdot 40$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 - 1)} \cdot 42$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2} \cdot 44$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3} \cdot 46$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} \cdot 48$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 6} \cdot 39$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot 41$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n/2} \cdot 43$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n} \cdot 45$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \cdot \ln(\ln n)} \cdot 47$$