

فرمول فاصله نقطه (x_0, y_0, z_0) از صفحه $ax+by+cz+d=0$ عبارت از

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

مثال: فاصله نقطه $A=(1, 2, 0)$ و $B=(1, 0, 1)$ از صفحه $3x-y+z=4$ را بیابید.

حل: داریم
معادله صفحه $3x-y+z-4=0$

$$\text{فاصله نقطه } A \text{ از صفحه} = \frac{|3(1) - (2) + (0) - 4|}{\sqrt{9+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{11}}$$

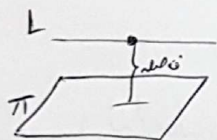
$$\text{فاصله نقطه } B \text{ از صفحه} = \frac{|3(1) - 0 + (1) - 4|}{\sqrt{9+1+1}} = \frac{0}{\sqrt{11}} = 0 \Rightarrow \text{یعنی نقطه } B \text{ در صفحه است}$$

کافیت یک نمایه فضا نقطه B در صفحه دارد و صحت می کند.

فاصله خط از صفحه:

اگر خط در صفحه واقع باشد یا خط و صفحه متقاطع باشند، فاصله آن از هم صفر است

اگر خط و صفحه موازی باشند، برابر بردار عمود بر آن فاصله آن از خط را می یابیم



مثال: فاصله خط L از صفحه π را بیابید.

$$\pi: 3x-y+z=4 \Rightarrow 3x-y+z-4=0$$

$$L: \frac{y-4}{-2} = \frac{z+1}{-2}, x=1$$

حل: $\vec{n} = (3, -1, 1)$ بردار عمود بر صفحه

$\vec{m} = (0, -2, -2)$ بردار در خط

$$\vec{n} \cdot \vec{m} = (3)(0) + (-1)(-2) + (1)(-2) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n} \perp \vec{m} \Rightarrow \pi \parallel L$$

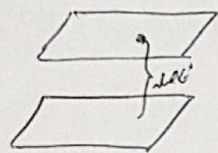
پس خط و صفحه موازی هستند

حال نقطه $(1, 4, -1)$ را از خط در نظر گرفته و فاصله آن را از صفحه π با فرمول بالا می یابیم

$$\text{فاصله} = \frac{|3(1) - (4) + (-1) - 4|}{\sqrt{9+1+1}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

- فاصله دو صفحه از هم :

اگر دو صفحه منطبق یا متقاطع باشند؛ آن گاه فاصله آن از هم صفر است
اگر دو صفحه موازی باشند؛ بر یک نقطه از فاصله آن از هم کافیست نقطه دلخواه از یکی تا صفحه دیگر را بکشیم.



مثال: فاصله دو صفحه را از هم بیابید

$$\pi_1: 2x - y + z = 4$$

$$\pi_2: 9x - 4y + 4z = 1$$

حل: $\vec{n}_1 = (2, -1, 1)$ بردار نرمال صفحه π_1

$\vec{n}_2 = (9, -4, 4)$

داریم $\vec{n}_2 = 4\vec{n}_1$ لذا $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ و در نتیجه $\pi_1 \parallel \pi_2$ یعنی دو صفحه موازی اند.

نقطه دلخواه

را از صفحه π_1 در نقطه $(0, 0, 4)$ قرار می دهیم. داریم

$$9(0) - 4(0) + 4(4) \stackrel{?}{=} 1$$

$$12 \neq 1$$

لذا نقطه در نظر گرفته شده از صفحه π_1 در معادله صفحه π_2 صدق نمی کند. لذا دو صفحه منطبق نیستند.

حال کافیست فاصله نقطه $(0, 0, 4)$ از صفحه π_2 را با صفحه π_1 بیابیم.

$$\pi_2: \Rightarrow 9x - 4y + 4z - 1 = 0$$

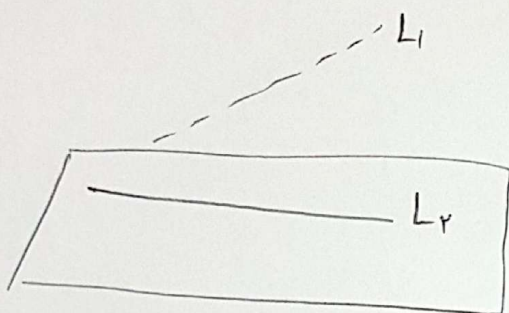
$$\text{فاصله} = \frac{|9(0) - 4(0) + 4(4) - 1|}{\sqrt{81 + 16 + 16}} = \frac{11}{\sqrt{113}}$$

حال با کمک معادله، فاصله دو خط متوازی از هم را که قبلاً آشنا کرده بودیم بدست می آوریم. بدین منظور فرض دو خط L_1 و L_2 متوازی باشند. قرار می دهیم

$\vec{n} = \vec{m}_1 \times \vec{m}_2$ که در آن $\vec{m}_1$ بردار در خط L_1 و $\vec{m}_2$ بردار در خط L_2 است.

نقطه دلخواه از خط L_2 در نظر گرفته بآن نقطه و $\vec{n}$ عمود افکنده می کشیم. این عمودش مل خط L_1 است و خط L_1 نیز موازی آن می باشد.

حال فاصله خط L_1 را با عمود بدست آورده می بینیم. این فاصله می باشد فاصله دو خط متوازی L_1 و L_2 است.



قبل ذکر است که روش دیگر هم برای بدست آوردن فاصله دو خط متوازی وجود دارد؛ که بنظر من روش ذکر شده مناسب تر است.

مثال: در نظر بگیرید

$$L_1: \frac{x-1}{2} = y-2 = z$$

$$L_2: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = z-1$$

در مثال ۵ درس قبل گفته شد، می داریم که خطوط L_1 و L_2 متوازی داریم.

$$\begin{aligned} \vec{m}_1 &= (2, 1, 1) \text{ بردار در خط } L_1 \\ \vec{m}_2 &= (2, 2, 1) \text{ بردار در خط } L_2 \end{aligned} \Rightarrow \vec{n} = \vec{m}_1 \times \vec{m}_2 = (2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \times (2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$$

$$= \dots = -\vec{i} + 2\vec{k} = (-1, 0, 2)$$

حال نقطه $(1, 0, 0)$ را از خط L_2 در نظر می گیریم. معادله صفحه π شامل L_2 را بدست می آوریم.

$$-(x-0) + 0(y-0) + 2(z-1) = 0 \Rightarrow -x + 2z = 2$$

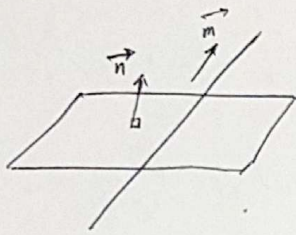
فاصله خط L_1 را با عمود متکونی می بینیم. در اینجا کافیست فاصله نقطه $(1, 0, 0)$ از خط L_1 را با عمود $-x + 2z - 2 = 0$ بدست آوریم که

$$\text{فاصله} = \frac{|-1 + 0 - 2|}{\sqrt{1+4}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

همانگونه که در صفحه (۹) درس جلب گشته ذکر شده، زاویه بین دو صفحه، زاویه بین بردارهای نرمال آن دو صفحه نیز، زاویه بین بردارهای نرمال آن است. زاویه بین یک خط و یک صفحه، متمم زاویه بین بردار نرمال خط و بردار نرمال صفحه است.

(توجه: در اینجا فرض می‌کنیم که خطوط یا صفحات متقاطع باشند، نه موازی یا منطبق)

حال به مثال زیر توجه فرمائید.



مثال:

$$L_1: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = z+2$$

$$L_2: x=3, \frac{y-5}{2} = z-1$$

$$\pi_1: x-2y+z=6$$

$$\pi_2: x+y=4$$

یادآوری: زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عبارت بدواز

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$L_1 \text{ بردار } \vec{m}_1 = (4, -1, 1)$$

$$L_2 \text{ " " " } \vec{m}_2 = (0, 2, 1)$$

$$\pi_1 \text{ بردار نرمال صفحه } \vec{n}_1 = (1, -2, 1)$$

$$\pi_2 \text{ " " " } \vec{n}_2 = (1, 1, 0)$$

داریم

زاویه بین دو خط L_1 و L_2 :

$$\cos \theta_{L_1, L_2} = \frac{\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2}{|\vec{m}_1| |\vec{m}_2|} = \frac{(4 \times 0) + (-1 \times 2) + (1 \times 1)}{\sqrt{9+1+1} \sqrt{0+4+1}} = \frac{-1}{\sqrt{11} \sqrt{5}}$$

زاویه بین دو صفحه π_1 و π_2 :

$$\cos \theta_{\pi_1, \pi_2} = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{(1 \times 1) + (-2 \times 1) + (1 \times 0)}{\sqrt{4} \times \sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{4} \sqrt{2}}$$

زاویه بین خط L_1 و صفحه π_1 :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{m}_1 \cdot \vec{n}_1}{|\vec{m}_1| |\vec{n}_1|} = \frac{(4 \times 1) + (-1 \times (-2)) + (1 \times 1)}{\sqrt{9+1+1} \sqrt{1+4+1}} = \frac{6}{\sqrt{11} \sqrt{6}} \Rightarrow \theta_{L_1, \pi_1} = 90^\circ - \alpha$$

$\theta_{L_1, \pi_1} = 180^\circ - \alpha$

بیشتر مربوط به خط و صفحه می آید. حال بیژن که چند مثال می پردازیم.

(۱) معادله مستقیم و پارامتر خط گذرا از نقطه $(1, 12, 4)$ با بردار $\vec{m} = (11, 1, 10)$ را بنویسید.

$$\frac{x-1}{11} = \frac{y-12}{1} = \frac{z-4}{10}, \quad \begin{cases} x = 11t + 1 \\ y = 1t + 12 \\ z = 10t + 4 \end{cases}$$

(۲) فصل مشترک (برخورد) دو صفحه $\pi_1: x + 2y - z - 9 = 0$ و $\pi_2: 2x - 4y + 4z + 2 = 0$ را بیابید.

$$\vec{n}_1 = (1, 2, -1) \quad \vec{n}_2 = (2, -4, 4)$$

$\vec{n}_1 \neq t \vec{n}_2, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2 \Rightarrow \pi_1 \nparallel \pi_2$
 یعنی دو صفحه موازی یا منطبق نیستند.
 پس تقاطع اند. بزرگترین خط فصل مشترک

$$\vec{m} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \times (2\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}) = \dots = 9\vec{i} - 4\vec{j} - 9\vec{k} = (9, -4, -9)$$

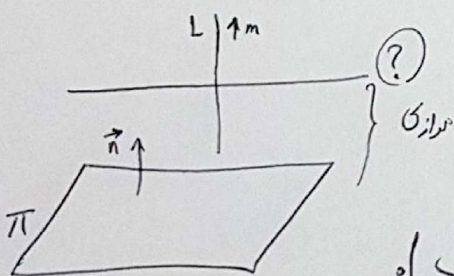
$$\begin{cases} \pi_1: x + 2y - z = 9 \\ \pi_2: 2x - 4y + 4z = -2 \end{cases} \xrightarrow{z=0} \begin{cases} x + 2y = 9 \\ 2x - 4y = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 9 \\ 4x = 4 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow (1, \frac{4}{3}, 0)$$

نقطه مشترک

$$\frac{x-1}{9} = \frac{y-\frac{4}{3}}{-4} = \frac{z}{-9}$$

لذا معادله خط

(۳) معادله خط گذرا از نقطه $(1, -1, 1)$ عمود بر خط $2x = 2y = z$ و موازی صفحه $\pi: x + y - z = 0$ را بیابید.



$$\vec{n} = (1, 1, -1) \text{ موازی با صفحه } \pi$$

$$\vec{m} = (1, 1, 1) \text{ عمود بر خط } L$$

بردار $\vec{m}$ در $\vec{n}$ عمود است (چون خط عمود بر خط L عمود است و موازی با π موازی است).

پس کافیت بردار $\vec{n}$ کبر $\vec{m}$ و $\vec{n}$ هر دو عمود باشند و $\vec{n} \times \vec{m}$ است. لذا

$$\vec{m} \times \vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) \times (1, 1, -1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \vec{k}\right) \times (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = \dots$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$$

بردار $\vec{n}$ خط است. نقطه $(1, -1, 1)$ هم که در خط قرار دارد است. لذا معادله خط در بردار $\vec{n}$

$$\frac{x-1}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y+1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{z-1}{-\frac{1}{2}}$$

(۴) معادله صفحه π عمود بر بردار $\vec{n}$ از معادله $x-y+z=0$ و $2x+y-4z-5=0$ باید که شامل نقطه $(4, 0, -2)$ باشد.

π_r π_1

جواب: -

$$\pi_1 \text{ بردار عمود } \vec{n}_1 = (1, -1, 1)$$

$$\pi_r \text{ بردار عمود } \vec{n}_r = (2, 1, -4)$$

اگر $\vec{n}$ بردار عمود π باشد و π عمود بر بردار $\vec{n}_1$ و $\vec{n}_r$ داریم

$$\pi \perp \pi_1 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{n}_1$$

$$\pi \perp \pi_r \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{n}_r$$



پس $\vec{n}$ هم بر $\vec{n}_1$ و هم بر $\vec{n}_r$ عمود باشد

لذا کافیت $\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_r$ لذا

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_r = (\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \times (2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}) = \dots = 3\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k} = (3, 6, 3)$$

نقطه $(4, 0, -2)$ که در خط قرار دارد است، معادله صفحه π را می‌آید.

$$3(x-4) + 6(y-0) + 3(z+2) = 0 \Rightarrow$$

$$3x - 6y + 3z = 6$$

"محقق شد"