

در این جلسه در مورد بردار در صفحه و توابع بردار صحبت خواهیم نمود.

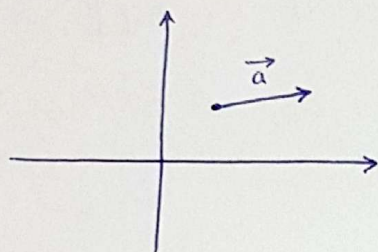
پاره خط جهت دار را بردار گوئیم.

— بردار سه خصوصیت مهم دارد:

۱. راستا

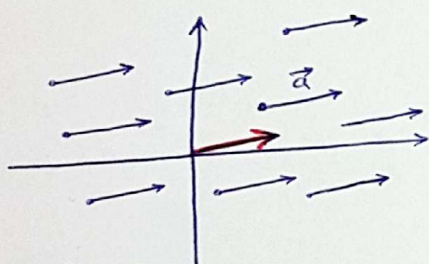
۲. جهت

۳. اندازه



بردار را با $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، ... نمایش می دهند و اندازه بردار $\vec{a}$ را با $|\vec{a}|$ نمایش می دهند.

گوئیم دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مساوی اند اگر سه خصوصیت آن یکسان باشد. لذا یکتا نیست بردار مساوی در صفحه (نقطه) وجود دارد. شکل زیر

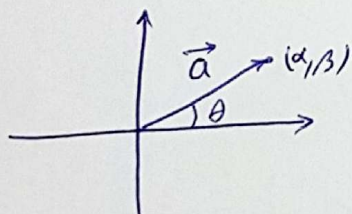


بردار استاندارد بردار $\vec{a}$ ، بردار مساوی با بردار $\vec{a}$ است که ابتدا و انتهای آن مبدأ باشد.

اگر $A = (x_a, y_a)$ و $B = (x_b, y_b)$ نقطه ابتدا و انتها بردار $\vec{a}$ باشد؛

آنگاه $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a)$ و $x_b - x_a$ ، $y_b - y_a$ را مولفه بردار $\vec{a}$ گوئیم.

اگر بردار را به صورت استاندارد در نظر بگیریم $\vec{a} = (\alpha, \beta)$ یعنی نقطه انتهای بردار است.



چند مفهوم ساده را در مورد بردار مرور می کنیم.

$$\vec{a} = (\alpha, \beta), \vec{b} = (x, y), t \in \mathbb{R}$$

$$1) |\vec{a}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$2) \cos \theta_a = \frac{\alpha}{|\vec{a}|}$$

$$3) \vec{a} + \vec{b} = (\alpha + x, \beta + y)$$

$$\tan \theta_a = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$4) -\vec{a} = (-\alpha, -\beta)$$

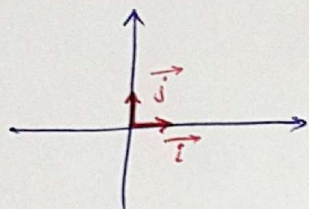
$$5) t\vec{a} = (t\alpha, t\beta)$$

θ_a کوچکترین زاویه بین بردار $\vec{a}$ (جهت استاندارد)

و جهت مثبت محور x است لذا همیشه

$$6) \vec{a} = |\vec{a}| (\cos \theta_a, \sin \theta_a)$$

$$0 \leq \theta_a \leq \pi$$



بردار $\vec{a}$ را بردار یکگانه می‌نامیم اگر $|\vec{a}| = 1$.

$\vec{i} = (1, 0)$ و $\vec{j} = (0, 1)$ بردار یکگانه استاندارد در محورهای مختصات مثبت هستند.

بردار هر بردار $\vec{a} = (x, y)$

$$\vec{a} = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x\vec{i} + y\vec{j}$$

یعنی هر بردار را می‌توان ترکیب خطی از بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ نوشت.

مثال:

۱) نقطه شروع بردار $5\vec{i} - 6\vec{j}$ نقطه $(-4, 1)$ است. نقطه پایانی آن را بیابید.

جواب:

نقطه $A = (-4, 1)$

نقطه $B = (a, b)$?

$$\vec{AB} = (a + 4, b - 1) = 5\vec{i} - 6\vec{j} = (5, -6)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 4 = 5 \Rightarrow a = 1 \\ b - 1 = -6 \Rightarrow b = -5 \end{cases} \Rightarrow \text{نقطه } B = (1, -5)$$

۲) بردار یکگانه $\vec{a}$ بیابید که زاویه $\frac{2\pi}{3}$ بسازد.

جواب:

$$|\vec{a}| = 1, \theta_a = \frac{2\pi}{3}$$

$$\vec{a} = |\vec{a}|(\cos \theta_a, \sin \theta_a) = \left(\cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

— حاصل ضرب نقطه (داخلی) دو بردار:

بردار بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ضرب داخلی را می‌گویند.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta_{ab} \quad (\theta_{ab} \text{ زاویه بین دو بردار})$$

یا زاویه بین دو بردار کوچکترین زاویه بین آن‌هاست زمانی که ابتدا آن‌ها را یکی سازیم.

$$\vec{a} = (x_a, y_a), \vec{b} = (x_b, y_b)$$

از طرف دیگر هم (ثبت می‌شود)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b$$

هر نقطه در فضا سه بعدی سه مولفه طول، عرض و ارتفاع را دارد لذا $A = (x, y, z)$ نمایش داده می شود

فاصله دو نقطه $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ در فضا سه بعدی از رابطه زیر بدست می آید

$$|P_1 P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

همانگونه که مشاهده می کنید همانند فاصله در فضا سه بعدی در صفحه است، فقط مولفه کم افزوده شده است.

برابر در فضا همانند برابر در صفحه می باشند با این خصوصیت فقط با این تفاوت که هم کم (ارتفاع) نیز دارند.

بزرگیک جهت مثبت $\vec{i} = (1, 0, 0)$

$\vec{j} = (0, 1, 0)$ $\vec{y} = \vec{j}$

$\vec{k} = (0, 0, 1)$ $\vec{z} = \vec{k}$

$$\vec{A} = (a, b, c) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

دو بردار در صفحه یا در فضا موازی اند اگر و تنها اگر ضرایب آن یکدیگر باشند

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b} = t\vec{a}, t \in \mathbb{R}$$

زاویه بین بردار $\vec{a}$ و محورهای مثبت x, y, z را زاویه انحراف می گویند که همانند عملی از رابطه زیر بدست می آید

$$\vec{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\cos \theta_{ax} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| |\vec{i}|} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

زاویه $\vec{a}$ با جهت مثبت x
 θ_{ax}

$$\cos \theta_{ay} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| |\vec{j}|} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

زاویه $\vec{a}$ با جهت مثبت y
 θ_{ay}

$$\cos \theta_{az} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| |\vec{k}|} = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

زاویه $\vec{a}$ با جهت مثبت z
 θ_{az}

ثابت می شود بر هر دو بردار $\vec{a}$ ،

$$\cos^2 \theta_{ax} + \cos^2 \theta_{ay} + \cos^2 \theta_{az} = 1$$

ضرب داخلی دو بردار در فضا هم مانند ضرب داخلی بردار در صفحه تعریف می شود

$$\vec{a} = (x_a, y_a, z_a) \quad \vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta_{ab} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

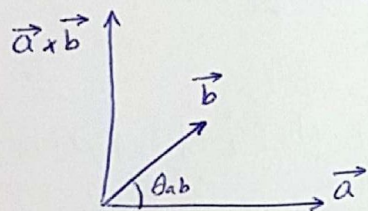
در فضا ضرب دیگری بین دو بردار بنام ضرب خارجی نیز تعریف می شود.

محاصل ضرب داخلی دو بردار چهاره یک بردار و در نتیجه ضرب خارجی، حاصل ضرب خارجی دو بردار یک بردار خواهد داشت. این بردار عمود بر بردار تشکیل دهنده آن تعریف می شود.

پس ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را که با $\vec{a} \times \vec{b}$ نمایش می دهد به صورت زیر تعریف می شود:

۱) راستا $\vec{a} \times \vec{b}$ عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$

۲) جهت آن برابر با قانون دست راست است از $\vec{a}$ به $\vec{b}$ یعنی چنان انگشت در بردار $\vec{a}$ (بزرگت چپ) به سمت بردار $\vec{b}$ خم شوند، انگشت شست جهت بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ را نشان می دهد.



۳) اندازه بردار به صورت زیر تعریف می شود

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta_{ab}$$

پس نتیجه می گیریم $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ در بردار $\vec{a}$ راستا و هم اندازه و در جهت مخالف هم هستند.

برای تعریف ضرب خارجی با دیگر دید می شود که

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$$

$$\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$$

$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

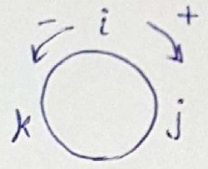
$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

براهین

براهین، بردار $(1, 0, 0)$ است بردار که اندازه آن ۱ و جهت آن جهت تعریف می شود.



دایره را نیز در ربع یک آوردن ضرب خارجی $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ را کمک می کند.

ضرب خارجی دو بردار از $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ همیشه برابر یکی از آنی می شود و علامت آن اگر دایره را ساعتگرد در ربع ضرب می کنند مثبت و در غیر اینصورت منفی خواهد بود. مثال

$$\vec{i} \times \vec{j} = +\vec{k}$$

از آن به $\vec{j}$ ساعتگرد دایره طی می شود

$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

از آن به $\vec{k}$ پادساعتگرد دایره طی می شود

حال بردار هر دو بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ داریم:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \times (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k})$$

جمله به جمله مانند ضرب معمولی
با حفظ ترتیب ضرب می کنیم

$$= (a_1 \vec{i}) \times (b_1 \vec{i}) + (a_1 \vec{i}) \times (b_2 \vec{j}) + (a_1 \vec{i}) \times (b_3 \vec{k}) + (a_2 \vec{j}) \times (b_1 \vec{i}) + (a_2 \vec{j}) \times (b_2 \vec{j}) + (a_2 \vec{j}) \times (b_3 \vec{k}) + (a_3 \vec{k}) \times (b_1 \vec{i}) + (a_3 \vec{k}) \times (b_2 \vec{j}) + (a_3 \vec{k}) \times (b_3 \vec{k})$$

حال بنا بر ضرب خارجی
 $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$

$$a_1 b_1 \vec{k} + a_1 b_2 (-\vec{j}) + a_1 b_3 (-\vec{k}) + a_2 b_1 (\vec{i}) + a_2 b_2 (\vec{j}) + a_2 b_3 (\vec{k}) + a_3 b_1 (-\vec{i}) + a_3 b_2 (\vec{j}) + a_3 b_3 (\vec{k})$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}$$

مثال:

$$\vec{a} = (1, 0, 2), \vec{b} = (1, 1, 0)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{i} + 2\vec{k}) \times (\vec{i} + \vec{j}) = (\vec{i} \times \vec{i}) + (\vec{i} \times \vec{j}) + 2(\vec{k} \times \vec{i}) + 2(\vec{k} \times \vec{j})$$

$$= \vec{k} + 2\vec{j} - 2\vec{i} = (-2, 2, 1)$$

روش دیگر (روش درجهان) φ بر یک بدست آوردن ضرب داخلی دوباره دارد که از آن می‌کنیم.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad (\text{عدد صفر})$$

روش دیگر

و حل در فضای داریم

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \begin{matrix} \theta_{ab} = 0 \\ \text{یا} \\ \theta_{ab} = \pi \end{matrix} \iff \begin{matrix} \text{دو بردار هم جهت} \\ \text{دو بردار مخالف جهت} \end{matrix} \iff \sin \theta_{ab} = 0 \iff |\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \iff \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad (\text{برابر صفر})$$

لذا به طور خلاصه

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \\ \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \end{cases}$$

تأکید می‌کنیم بر هر بردار $\vec{a}$ داریم:

خصوصیت دیگر φ بر یک ضرب داخلی دوباره دارد که از این می‌توانیم استفاده کنیم.

تابع بردار:

تابع $\vec{F}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ و تابع $\vec{g}: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی که دامنه آن زیر مجموعه $\mathbb{R}$ است و حاصل آن بردار در فضای $\mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{R}^3$ است.

نکات مرتبط با توابع بردار و بردار حالت $\vec{g}: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ بیان می‌کنیم.

مثال: $\vec{g}(t) = (\sqrt{t}, t+1, \frac{1}{t})$ یک تابع بردار است. این تابع بردار سه مولفه دارد که خودش تابع حقیقی هستند.

$$g_1(t) = \sqrt{t}, \quad g_2(t) = t+1, \quad g_3(t) = \frac{1}{t}$$

$$\vec{g}(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))$$

در حالت کلی برای تابع بردار $\vec{P}(t) = (P_1(t), P_2(t), P_3(t))$ داریم
($P_i(t)$ را می‌توانیم به صورت $\vec{P}_i(t)$ بنویسیم)

$$1) D_{\vec{P}} = D_{P_1} \cap D_{P_2} \cap D_{P_3}$$

$$2) \lim_{t \rightarrow a} \vec{P}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow a} P_1(t), \lim_{t \rightarrow a} P_2(t), \lim_{t \rightarrow a} P_3(t) \right)$$

$$3) \vec{P}'(t) = (P_1'(t), P_2'(t), P_3'(t))$$

$$4) \int \vec{P}(t) dt = \left(\int P_1(t) dt, \int P_2(t) dt, \int P_3(t) dt \right)$$

لذا برای بررسی اینکه یک تابع بردار از درون دامنه‌ای که برای آن تعریف شده است می‌آید.
برای (۲)، یک تابع بردار در نقطه a همواره در دامنه آن قرار می‌گیرد (همین طور یک شکل).
برای (۳)، یک تابع بردار مشتق پذیر است؛ اگر $\vec{P}(t)$ مشتق پذیر باشد.
برای (۴)، یک تابع بردار از شکل پذیر است؛ اگر $\vec{P}(t)$ مشتق پذیر باشد.

$$\vec{g}(t) = (\sqrt{t}, t+1, \frac{1}{t})$$

$$1) D_{\vec{g}} = ([0, +\infty)) \cap (1, \infty) \cap (\mathbb{R} - \{0\})$$

$$2) \lim_{t \rightarrow \frac{1}{e}} \vec{g}(t) = \left(\sqrt{\frac{1}{e}}, \frac{1}{e} + 1, e \right)$$

$$3) \vec{g}'(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, 1, -\frac{1}{t^2} \right)$$

$$4) \int \vec{g}(t) dt = \left(\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2} t^2 + t, \ln t \right)$$

مسائل

بردارهای داده شده را در یک دستگاه مختصات قائم (با اختیار مبدا به عنوان نقطه شروع مشترک) رسم نمایید .

$$1. \quad -2i, i + j, -i + 2j, 2i - j, -3j$$

$$2. \quad \frac{3}{2}j, i - j, -2i + j, 2i + 3j, -i - 2j$$

در هر یک از مسائل زیر، بردارهای $a + b$ ، $a - b$ ، $2a + 3b$ ، و $3a - 4b$ را پیدانمایید .

$$3. \quad a = (1, -5), b = (3, 6)$$

$$4. \quad a = (2, 0), b = (0, -2)$$

$$5. \quad a = i + j, b = i - j$$

$$6. \quad a = i, b = -i - j$$

$$7. \quad a = i + 3j, b = -3i + 2j$$

$$8. \quad a = 7i - 9j, b = 2i + 5j$$

$$9. \quad a = (1, 1), b = (1, -1)$$

$$10. \quad a = (6, -5), b = (-4, 3)$$

بردار $\overline{AB}$ با نقاط انتهایی داده شده را بیابید .

$$11. \quad A = (-3, 0), B = (0, 6)$$

$$12. \quad A = (3, 5), B = (4, 7)$$

مسائل

حد داده شده را محاسبه کنید .

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \mathbf{i} - 2e^t \mathbf{j} \right) \quad . ۲$$

$$\lim_{t \rightarrow 2} (t^2 \mathbf{i} + t^3 \mathbf{j}) \quad . ۱$$

مسائل

حاصل ضرب نقطه‌ای $a \cdot b$ بردارهای داده شده و نیز زاویه بین بردارها را بیابید.

$$1. \quad a = (-2, 1), b = (3, 6) \quad 2. \quad a = (1, 1), b = (-2, -2)$$

$$3. \quad a = (1, 1), b = (1, 0) \quad 4. \quad a = (3, 4), b = (6, -8)$$

$$5. \quad a = -i - j, b = 2i \quad 6. \quad a = 16i, b = -19j$$

$$7. \quad a = 12i + 5j, b = 4i + 3j$$

$$8. \quad a = 7i - 24j, b = -3i + j$$

کمیات زیر را با فرض اینکه زاویه بین بردارهای a و b مساوی $2\pi/3$ بوده و $|a| = 3, |b| = 4$ پیدا نمایید.

$$9. \quad a \cdot b \quad 10. \quad |a - b|^2$$

$$11. \quad |3a + 2b|^2 \quad 12. \quad (3a - 2b) \cdot (a + 2b)$$

۱۳. $A = (1, -4), B = (-1, -9)$

۱۴. $A = (-5, 10), B = (0, 0)$

۱۵. $A = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}), B = (\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$

۱۶. $A = (-\sin \frac{1}{4}\pi, \cos \frac{1}{4}\pi), B = (\cos \frac{1}{4}\pi, \sin \frac{1}{4}\pi)$

۱۷. نقطه پایان بردار $-7i + 2j$ عبارت است از $(3, -11)$. نقطه شروعش چیست؟

۱۸. نقطه شروع بردار $5i - 6j$ عبارت است از $(-4, 8)$. نقطه پایانش چیست؟

اندازه بردار داده شده را بیابید.

۲۰. αi

۱۹. $\frac{4}{3}i - \frac{2}{3}j$

۲۲. $-7i + 24j$

۲۱. $-\beta j$

۲۴. $-\sqrt{5}i + \sqrt{11}j$

۲۳. $35i + 12j$

۲۵. اندازه کدامیک از بردارهای $3i + 3j$ و $4i - j$ بزرگتر است؟

۲۶. برداری با نصف اندازه $16i - 12j$ و جهت مخالف آن را بیابید.

بردار یکه همجهت بردار داده شده را بیابید. زاویه از محور x مثبت به این جهت چقدر است؟

۲۹. $-3i + 2j$

۲۸. $i - j$

۲۷. $i + j$

۳۲. $40i + 9j$

۳۱. $-6i - 8j$

۳۰. $-i + 4j$

بردار یکه‌ای را بیابید که با محور x مثبت زاویه داده شده را بسازد.

۳۵. $3\pi/4$

۳۴. $7\pi/6$

۳۳. $5\pi/3$

$\theta = \text{Arctg} \frac{b}{a}$

فاصله بین جفت نقاط داده شده را بیابید .

$$9. (0, 0, 0), (12, -15, 16) \quad 10. (0, 1, 0), (-4, 3, 4)$$

$$11. (4, -5, 3), (6, -2, -3) \quad 12. (1, 1, 5), (10, 3, -1)$$

$$13. (8, 11, 9), (4, 12, 2) \quad 14. (3, \pi, -14), (-9, \pi, -9)$$

$$15. (5, 0, -3), (0, 4, 0) \quad 16. (1, -1, 1), (-1, 1, -1)$$

۱۷. نقطه‌ای روی محور y بیابید که از نقاط $(1, -3, 7)$ و $(5, 7, -5)$ به یک فاصله باشد .

۱۸. نشان دهید که نقاط $A = (3, -1, 6)$ ، $B = (-1, 7, -2)$ ، و $C = (1, -3, 2)$ رئوس یک

مثلث قائم‌الزاویه‌اند . چه ضلعی وتر است ؟

۱۹. کدام یک از نقاط $(-3, 0, 2)$ ، $(2, 1, 3)$ ، $(-1, 3, 1)$ ، و $(2, 2, -2)$ به مبدأ نزدیکتر

است ؟

۲۰. فرض کنید M نقطه میانی پاره خط P_1P_2 واصل بین نقاط $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ و

$P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ باشد . نشان دهید که

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

راهنمایی . ر. ک. مثال ۴ ، صفحه ۳۷ .

نقطه میانی پاره خط واصل بین جفت نقاط داده شده را بیابید .

$$21. (1, -7, 0), (-9, 11, 12)$$

$$22. (-4, 9, 2), (6, 3, 8)$$

۲۵. $\mathbf{f}(t) = \sec t[(\tan t)\mathbf{i} + (\sec t)\mathbf{j}], F(\pi/3) = \mathbf{0}$

انتگرال داده شده از یک تابع برداری را محاسبه کنید.

۲۷. $\int_4^9 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \mathbf{i} + \sqrt{t} \mathbf{j} \right) dt$

۲۶. $\int_1^2 (3t\mathbf{i} - 4t^2\mathbf{j}) dt$

۲۹. $\int_0^{10} |(\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}| dt$

۲۸. $\int [(t \ln t)\mathbf{i} + (\csc^2 t)\mathbf{j}] dt$

۳۱. $\int [(\sin^2 t)\mathbf{i} + (\cos^2 t)\mathbf{j}] dt$

۳۰. $\int_0^1 (2^t\mathbf{i} + 3^{-t}\mathbf{j}) dt$

۳۲. فرض کنید $\mathbf{f}(t)$ و $\mathbf{g}(t)$ توابعی برداری بوده و هر دو بر $[a, b]$ پیوسته دهید که

بردارها در صفحه

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\arccos t}{5} \mathbf{i} + \sqrt{t} \mathbf{j} \right) \quad \cdot \underline{۴}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{1}{t^2 + 1} \mathbf{i} + \cos \frac{\pi t}{3} \mathbf{j} \right) \quad \cdot \underline{۳}$$

$$\lim_{t \rightarrow -1} \left(\frac{t^2 - 1}{t - 1} \mathbf{i} + \frac{t^3 + 1}{t + 1} \mathbf{j} \right) \quad \cdot \underline{۶}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\ln t} \mathbf{i} + \frac{1 - t}{1 + t} \mathbf{j} \right) \quad \cdot \underline{۵}$$

۷. آیا تابع برداری $\mathbf{f}(t) = (\ln t) \mathbf{i} + (\ln(\ln t)) \mathbf{j}$ در $t = e$ ؛ در $t = 1$ پیوسته است؟

نشان دهید که تابع برداری در $t = e$ پیوسته است.