

فصل ۱۲ تابع چندمتغیره

در این فصل تابع چندمتغیره را تعریف کرده و برخی از خصوصیات آن را ذکر می‌کنیم.

تابعی که تاکنون مورد مطالعه و استفاده قرار گرفته اند تابع حقیقی نام دارند. یعنی تابعی که دامنه آن زیر مجموعه از $\mathbb{R}$ و برد هم زیر مجموعه از $\mathbb{R}$ است.

از $\mathbb{R}$ است. مثلاً $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ بگذاریم $D = [0, +\infty)$ و $f(x) = \sqrt{x}$. این تابع یک متغیره

مانند x داشتند. حال تابعی را می‌خواهیم تعریف کنیم که بیش از یک متغیره دارند.

فرض کنید D زیر مجموعه از فضای $\mathbb{R}^n$ باشد. تابع $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ را یک تابع دو متغیره گوئیم.

چون اعداد دایره تابع دو متغیره هستند.

بگذاریم مثلاً $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ به شکل $f(x, y) = 2x - 4y$ یک تابع دو متغیره است.

پس تابع دایره تابع دو متغیره زیر مجموعه از $\mathbb{R}^n$ و برد آن زیر مجموعه از $\mathbb{R}$ است.

به طور مشابه، فرض کنید D زیر مجموعه از فضای $\mathbb{R}^n$ باشد. تابع $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ را یک تابع سه متغیره گوئیم. به عنوان مثال $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ به شکل $f(x, y, z) = xy + z$ یک تابع سه متغیره

است. لذا تابع سه متغیره زیر مجموعه از $\mathbb{R}^n$ و برد آن زیر مجموعه از $\mathbb{R}$ است.

مانند توابع حقیقی، در توابع چندمتغیره هم معمولاً فقط تابع دایره می‌شود و دامنه آن را از دایره

فقط طبیعت می‌آوریم. در مثال بالا فرض کنید دایره تابع چندمتغیره ذکر شده را به یک تابع می‌آوریم.

$$f(x, y, z) = \frac{x-y}{y-z} \quad \text{مثال ۱}$$

$$D_f = \{(x, y, z) \mid y \neq z, x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

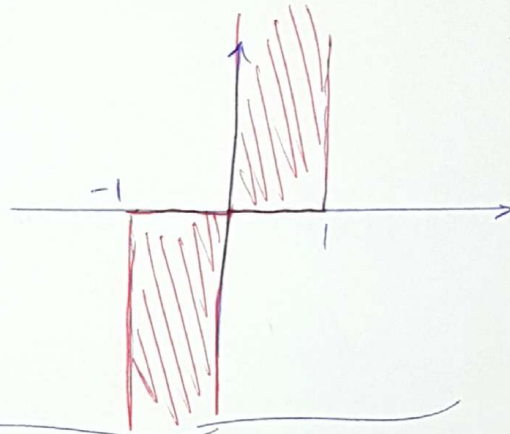
مفنی دامنه تابع f کل $\mathbb{R}^3$ بجز نقاطی که $y-z=0$ است.

$$f(x, y) = \arcsin x + \sqrt{xy}$$

مثال ۲

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, xy \geq 0\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} x \in [0, 1], y \in [0, +\infty) \\ \text{یا} \\ x \in [-1, 0], y \in (-\infty, 0] \end{array} \right\}$$

نواحی که در تصویر مشخص شده است.



همانگونه که مشاهده کردید دامنه تابع دو تفرقه داشته $\mathbb{R}^2$ و دامنه تابع سه تفرقه در فضای $\mathbb{R}^3$ رسم مشخص می شود.

همانند توابع یک تفرقه اعمال جبر جمع، تفریق، ضرب و تقسیم بر توابع چند تفرقه تعریف می شوند؛ اما مسلماً ترکیب دو تابع چند تفرقه با هم مفنی نمی دهد. چنان ترکیب زمینی داشت که دامنه یکی شامل برد دیگری باشد. بعبارت بهتر دامنه یکی در برد دیگری قرار نگیرد؛ یا بتواند دامنه ترکیب آنرا بدست آورد و در واقع ترکیب آن مفنی داشته باشد پس فقط می توان یک تابع حقیقی را با یک تابع چند تفرقه ترکیب کرد. به مثال که زیر توجه نمایند.

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad g(t) = t^2, \quad h(x, y) = x - y$$

مثال:

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}, \quad D_g = \mathbb{R} \text{ (تابع حقیقی)}, \quad D_h = \mathbb{R}^2$$

$$(f+h)(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} + x - y, \quad (f \times h)(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2}$$

$$\left(\frac{h}{f}\right)(x, y) = (x - y)(x^2 + y^2)$$

$$g(f(x, y)) = g\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) = \left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)^2 = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$$

اگر فرض کنیم $k(t) = \sqrt{t}$ ، می‌توانیم بنویسیم

$$f(g(t), k(t)) = \frac{1}{(g(t))^2 + (k(t))^2} = \frac{1}{t^2 + t}$$

ولی می‌توانیم $f \circ h$ و $h \circ f$ را هم محاسبه کنیم.

به طور کلی به تابع n متغیره نیز تعریف می‌تواند. مثلاً

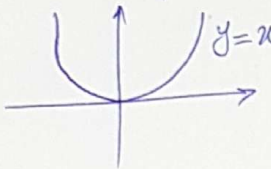
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2 - x_4}$$

تابع چهار متغیره است و $D_f = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 x_2 \neq x_4\}$. بحث ما فقط در مورد تابع

دو متغیره و خواص آن خواهد بود.

نکته مهمی که در مورد تابع چند متغیره و بردار اینست که تابع حقیقی یا تابع یک متغیره را می توانیم رسم می شوند مثلاً

برای رسم تابع $k(x) = x^2$ با قرار دادن $y = x^2$ آن را در صفحه رسم می نمایم.



تابع دو متغیره $z = f(x, y)$ در صفحه سه بعدی رسم می شوند و اگر می توانستیم رسم کنیم تابع سه متغیره

$w = f(x, y, z)$ در صفحه چهار بعدی رسم می شدند. پس رسم تابع سه متغیره که عملاً امکان پذیر نیست

و امکان رسم ساده همه تابع دو متغیره (بجز استناد از نرم افزار ریاضی) نیز وجود ندارد. محققین حسن رسم تابع حقیقی این بودند تمام خصوصیات تابع را در شکل آن یکجا می کشیدند و دیدن حال با کمک مفاهیمی سعی می کنیم برخی خصوصیات تابع را در سه متغیره را حدس بزنیم.

تعریف: منحنی تراز تابع دو متغیره $f(x, y)$ یعنی رسم فصل مشترک نمودار تابع $f(x, y)$ با صفحه $z = c$ بر $c \in \text{Im } f$ ، در صفحه xy . عبارت ساده تر $f(x, y) = c$ را که در صفحه xy رسم می نمایم به آن منحنی تراز تابع f می گوئیم. حال اگر $c \in \text{Im } f$ در مختلف این منحنی را در صفحه xy رسم کنیم به آن منحنی تراز تابع $f(x, y)$ می گوئیم.

مثال: منحنی تراز تابع $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ را می خواهیم رسم نمایم.

داریم $x^2 + y^2 \geq 0$ لذا بر تابع $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ البته برای تابع z هم داریم

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

دايره

$$\Rightarrow -x^2 - y^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow 1 - x^2 - y^2 \leq 1$$

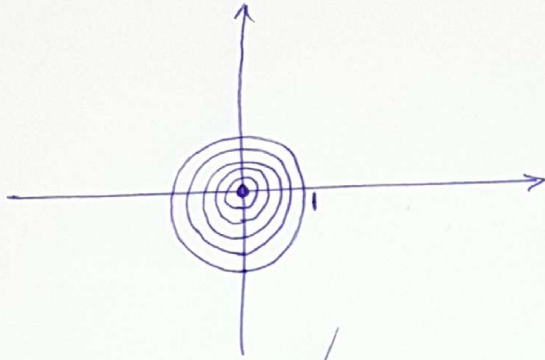
$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq 1$$

حل منحنی مرکزدار رسم می کنیم

$$Z=C, C \in [0,1] \Rightarrow$$

$$\sqrt{1-(x^2+y^2)}=C \Rightarrow 1-(x^2+y^2)=C^2 \Rightarrow x^2+y^2=1-C^2$$

برای $C \in [0,1]$ ، منحنی مرکزدار دایره ای به مرکز مبدأ، شعاع $\sqrt{1-C^2}$ خواهد بود.



فقط همان از روی شکل منحنی مرکزدار حل می زنیم که احتمالاً تابع در مبدأ، ماکزیمم یا می نیمم دارد. چنان همانگونه که منحنی مرکزدار بیان می کنند

در مبدأ دایره مرکز منحنی مرکزدار هر چه به مبدأ نزدیک تر می شوند شعاع کوچکتر پیدا می کنند. (توصیفی - تکلیلی در فصل بعدی، تصویر)

$$Z = p(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$$

برای رسم می کنیم

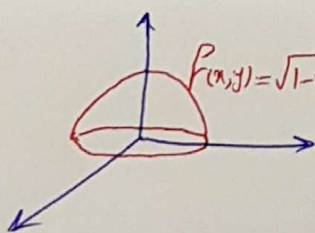
$$p(0,0) = \sqrt{1} = 1, \quad \forall (x,y) \in D_p, \quad 0 \leq p(x,y) \leq 1$$

لذا تابع $p(x,y)$ در مبدأ، ماکزیمم مطلق دارد.

هر چند جهت آینده در مورد شنیده پیدا کردن اگر رسم / تابع چند نقطه عجیب می کنیم؛ اما منحنی مرکزدار هم در تشخیص برخی خواص تابع چند نقطه کمک می کنند.

$$\text{در کل برای تابع } Z = p(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)} \text{ داریم}$$

$$Z^2 = 1-(x^2+y^2) \Rightarrow x^2+y^2+Z^2=1 \rightarrow \text{تابع } p(x,y) \text{ نیکه به دایره } (Z>0)$$



که اگر به مرکز مبدأ، شعاع 1 است و در نقطه مبدأ مقدار $p(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ ماکزیمم مطلق خود را که یک است می گیرد.

مثال: منحنی آیزار $Z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ بچند از

$$Z = C \Rightarrow 1 - \sqrt{x^2 + y^2} = C$$

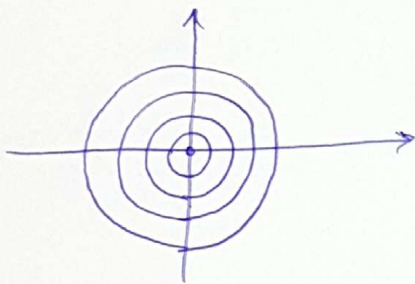
$$\Rightarrow 1 - C = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = (1 - C)^2$$

منحنی آیزار، دایره‌ای به مرکز

مبدأ و شعاع $1 - C$ برای $C \leq 1$

هستند



در ضمن

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$

$$1 - \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \quad \text{لذا}$$

$$C \in (-\infty, 1] \quad \text{پس}$$

لذا $g(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ احتمال درجه‌ای ماکسیم می‌تیم مطلق دارد

$$g(0, 0) = 1 - \sqrt{0} = 1$$

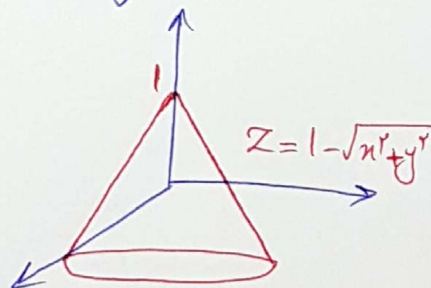
می‌دانیم $g(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$ ، پس تابع $g(x, y)$

در مبدأ ماکسیم مطلق دارد

در ضمن می‌دانیم $Z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ برای

$$1 - Z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow (1 - Z)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - (Z - 1)^2 = 0$$

$$\rightarrow 1 - Z \geq 0 \Rightarrow \boxed{Z \leq 1} \quad \text{معادله مخروط به شکل است}$$



شکل برای این درس
حله گذاشته

باید تفاوت منحنی آیزار $h(x, y)$ و
در $g(x, y)$ در مثال هستی، تقدیر
درس خواهد بود

قلمرو (طبیعی) تابع داده شده از چند متغیر را توصیف کنید.

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \quad . ۳۱$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \quad . ۳۲$$

$$z = x^2 - y^2 \quad . ۳۳$$

$$z = \frac{xy}{x - y} \quad . ۳۴$$

$$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad . ۳۵$$

$$z = \frac{1}{x^2 - y} \quad . ۳۶$$

$$z = \ln(x + y) \quad . ۳۷$$

$$z = \ln(xy) \quad . ۳۸$$

$$z = y + \arccos x \quad . ۳۹$$

$$u = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \quad . ۴۰$$

$$u = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \quad . ۴۱$$

$$u = \sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2} \quad . ۴۲$$

$$u = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z \quad . ۴۴$$

$$u = e^{xy/z} \quad . ۴۳$$

نمودار تابع داده شده از دو متغیر را توصیف نمایید .

$$z = 1 - x^2 - y^2 \quad . ۴۶$$

$$z = 2x + 3y \quad . ۴۵$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad . ۴۸$$

$$z = -\sqrt{16 - x^2 - y^2} \quad . ۴۷$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \quad . ۵۰$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \quad . ۴۹$$

گلدسونگ تبار چند متغیره :

فرض کنید $P_0 = (a, b)$ نقطه ثابتی در افق باشد و $\delta > 0$ عدد ثابت. تعریف می کنیم

$$N_\delta(P_0) = \{P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |PP_0| < \delta\}$$

$$= \{P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta\}$$

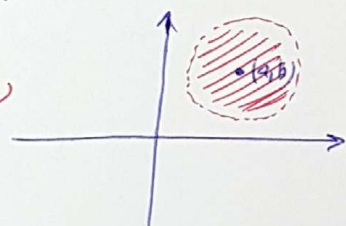
$$P_0, P \text{ نقطه در صفحه} \Rightarrow |PP_0| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

به $N_\delta(P_0)$ همگی نقطه P_0 گوئیم که داریم

$$N_\delta(P_0) = \{P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta^2\}$$

مجموعه تمام نقاط درون دایره مرکز (a, b) و شعاع δ

دقت کنید نقاط مرز دایره را شامل نمی شود



به همین ترتیب برای $P_0 = (a, b, c)$ و $\delta > 0$ داریم

$$N_\delta(P_0) = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |PP_0| < \delta\} = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 < \delta^2\}$$

مجموعه تمام نقاط درون گوی که مرکز (a, b, c) و شعاع δ

متغیره از هم گیرند نقطه P_0 یعنی همگی P_0 که نقطه P_0 از آن جدا شده است. یعنی $N_\delta(P_0) - \{P_0\}$

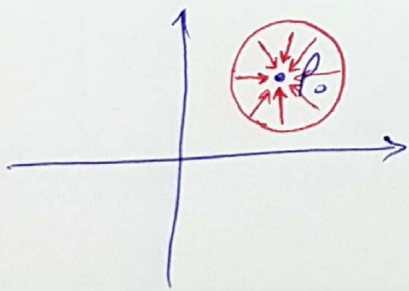
حل منقسم حرکت تابع چند متغیره را در یک نقطه تعریف می کنیم

فرض کنید $f(x)$ یک تابع چند متغیره باشد. گوئیم حد تابع $f(x)$ در نقطه p_0 برابر L است و آن را با $\lim_{x \rightarrow p_0} f(x) = L$ نمایش می دهیم، اگر $x \rightarrow p_0$ نتیجه بگیریم $f(x) \rightarrow L$.

حد داشتن تابع $f(x)$ یعنی وجود L و برقرار است در بالا. مفهوم دقیقاً مانند حد یک تابع حقیقی است با این تفاوت که در تابع حقیقی وقتی $x \rightarrow a$ ، a یا از راست به a نزدیک می شد یا از چپ. چنان که در تابع حقیقی در هر مورد بود؛ اما در تابع (چند متغیره) وقتی $x \rightarrow p_0$ ، یعنی x می تواند در هر جهتی یک گیر از p_0 (که دامنه در به شعاع p_0 داشته بود) به آن نزدیک شود و در هر تابع به متغیره $p_0 \rightarrow x$ یعنی x می تواند در هر جهتی یک گوی باز (یک هم گیر از p_0) به آن نزدیک شود. لذا بحث حد تابع چند متغیره تفاوت از سر در شخص وجود آن با حد تابع حقیقی دارد.

در تابع حقیقی وقتی می گفتیم تابع $f(x)$ در نقطه a محدود است؛ معنی اش این بود که یا چپ یا راست ندارد و یا چپ و راست با هم در a یکی نیستند.

در تابع $f(x)$ چند متغیره حد داشتن $f(x)$ در p_0 بدین معنی است که حداقل در یکی از جهت های دور هم یکی p_0 که $x \rightarrow p_0$ ، محدود ندارد یا اینکه حداقل در هر جهت دور هم یکی p_0 وجود دارند که حد تابع $f(x)$ در آن دور محدود است متفاوت می شود. به مثال $f(x)$ در p_0 که نمی تواند.

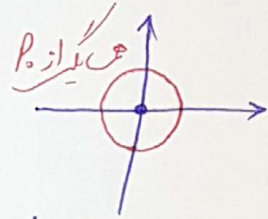


وجود باید هم وجود حد تابع زیر را در نقطه داده شده بررسی نمایند.

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad P_0 = (0, 0)$$

حاصل 1

ابتدا در مسیر $x=0$ ، یعنی در محور y به P_0 نزدیک می شویم پس داریم



حد:

$$x=0 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow P_0} f(x,y) \stackrel{x=0}{=} \lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

↑
داریم
 $x=0$
در خط y به P_0

حال در مسیر $y=0$ ، یعنی در محور x به P_0 نزدیک می شویم

$$y=0 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow P_0} f(x,y) \stackrel{y=0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

↑
داریم
 $y=0$
در خط x به P_0

چون از دو مسیر گذرا از P_0 به دو حد مختلف رسیدیم، یعنی تابع $f(x,y)$ در P_0 حد ندارد.

قبل از ذکر مثال دوم به چند نکته توجه فرمایید.

1. همانند تابع حقیقی، خواص حد برای تابع چند متغیره نیز برقرارند. پس جهت گرفتن حد از تابع چند متغیره ابتدا نقطه P_0 را در فضای n قرار دهیم. اگر حالت مهم پیش نیامده باشد حل است.

2. در صورت وجود آزمون حالت مهم تنش می کنیم هر یک از متغیرها را به گونه ای در حد P_0 می بینیم که تابع حد داشته باشد. وقت کندگی نیست می گذاریم P_0 در صفحه یا در فضای n می گذاریم (شکل پیکان شماره ۸)

3. هر یک از انتخابی جهت بررسی حد حتماً باید در دامنه تابع باشند و حتماً باید از نقطه P_0 نیز بگذرند.

مثلاً در مثال بالا $y=x$ ، $y=-x$ ، $y=x^2$ ، $y=x^n$ ، $y=\sqrt{x}$ و ... هر یک گذرا از P_0 هستند ولی $y=x+1$ می گذرا از P_0 نیست. (توضیح: یک خط در n بعدی، تقویر خطی)

$$g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad P_0 = (0, 0)$$

مثال ۲

جواب: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = \frac{0}{0}$ مبهم (برای بررسی در این مورد باید از روش‌های دیگر استفاده کرد)

$x=0$ ✓

$$\lim_{(x,y) \rightarrow P_0} g(x,y) \stackrel{x=0}{=} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y \rightarrow 0}} g(0,y) \stackrel{x=0}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

$y=0$ ✓

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) \stackrel{y=0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} g(x,0) \stackrel{y=0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

هیچوقت با روش‌های دیگر نتوانستیم جواب پیدا کنیم

حالا برای بررسی دیگر از روش دیگری استفاده می‌کنیم

$x=y$ ✓

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) \stackrel{x=y}{=} \lim_{x \rightarrow 0} g(x,x) \stackrel{x=y}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

پس تابع $g(x,y)$ در مبدأ همگرا نیست.

$$h(x, y, z) = \frac{xyz}{x^3 + y^3 + z^3}, \quad P_0 = (0, 0, 0)$$

مثال ۱

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow P_0} h(x,y,z) = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$x=0$ ✓

$$\lim_{x \rightarrow P_0} h(x) = \lim_{(y,z) \rightarrow (0,0)} \frac{0}{y^3 + z^3} = 0$$

$\neq$

پس تابع همگرا نیست

$x=y=z$ ✓

$$\lim_{x \rightarrow P_0} h(x) \stackrel{x=y=z}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{3x^3} = \frac{1}{3}$$

$$K(x, y) = \frac{\tan(xy)}{xy}, \quad p_0 = (0, 0)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow p_0} K(x,y) = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

برای پیدا کردن حد لیمیت می‌توانیم از روش‌های مختلف استفاده کنیم. یکی از روش‌ها این است که از خاصیت $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tan u}{u} = 1$ استفاده کنیم.

نکته: ۱. در حدگیری از توابع چند متغیره قاعده هسپیتال
مقرراتیست؛ همگرایی در حدگیری در هر یک از متغیرها باید باشد.
۲. تعمیم می‌شود حتی اگر امکان دارد ابتدا تابع را ساده کنیم و بعد حد بگیریم.
۳. برخی خواص حد مانند $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tan u}{u} = 1$ را می‌توان استفاده کرد.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} K(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\tan(xy)}{xy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\tan(xy)}{xy} \times y$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\tan(xy)}{xy} \times \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 1 \times 0 = 0$$

پس تابع $K(x,y)$ در عبارت $(0,0)$ حد دارد و حد آن صفر است.

پس گوییم تابع $f(x)$ در نقطه p_0 پیوسته است اگر مانند تابع حقیقی:

$$p_0 \in D_f \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow p_0} f(x) \text{ موجود باشد} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow p_0} f(x) = f(p_0) \quad (3)$$

و گوییم تابع $f(x)$ بر مجموعه D_f پیوسته است؛ اگر در هر یک از نقاط این مجموعه پیوسته باشد.

قابل ذکر است که در نقطه $p_0 \in D_f$ پیوستگی یعنی برقرار است در $\lim_{x \rightarrow p_0} f(x) = f(p_0) \quad \forall x \in D_f$ ؛ یعنی فقط نقاط در D_f .

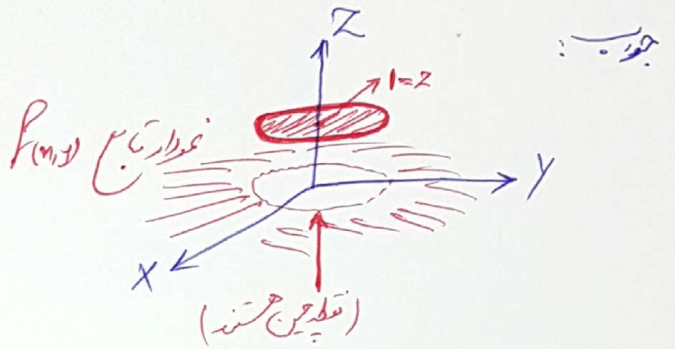
داخل D_1 بررسی می‌کنند. (توضیحات تکمیلی در فصل بعدی تقدیر می‌گردد)

مثال: بررسی کنید تابع زیر را در دامنه‌اش بررسی کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & , x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & , \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

لذا قطعاً تابع در R^2 یعنی دامنه‌اش پیوسته نیست.

اما دلیل غیرشکل: در نقطه $P_0 = (0, 1)$

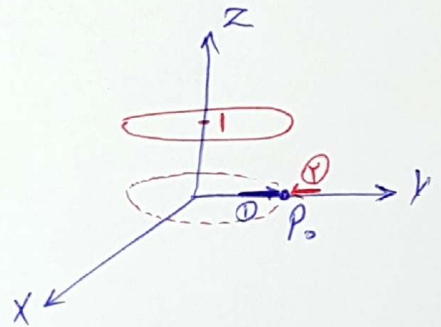


① $x=0$
داخل دامنه

$$\lim_{(x, y) \rightarrow P_0} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow P_0} 1 = 1$$

② $x=0$
خارج دامنه

$$\lim_{(x, y) \rightarrow P_0} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow P_0} (0) = 0$$



لذا تابع P_0 همواره پیوسته نیست

در کل تابع $f(x, y)$ در هیچ یک از نقاط دامنه $x^2 + y^2 = 1$ همواره.

حد داده شده را (در صورت وجود) حساب کنید .

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\sqrt{3}, -1)} \sqrt{x^2 - y^3} \quad . ۲$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} (3xy - 2x^2) \quad . ۱$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} \quad . ۴$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \quad . ۳$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,5)} e^{x^2 - xy} \quad . ۶$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi, 1/4)} x^2 \tan xy \quad . ۵$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{x} \quad . ۸$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^4} \quad . ۷$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4, -\infty)} \tanh(x + y) \quad . ۱۰$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, 1)} \arctan \frac{x}{y} \quad . ۹$$

آیا تابع داده شده f بر مجموعه مشخص شده D پیوسته است؟ جواب خود را توضیح دهید.

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}, D = \{(x, y): (x - 1)^2 + y^2 < \frac{1}{2}\} \quad ۱۵.$$

$$f(x, y) = \cot \pi xy, D = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y \leq 1\} \quad ۱۶.$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sin \pi x} + \frac{1}{\sin \pi y}, D = \{(x, y): (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}\} \quad ۱۷.$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y}, D \text{ مثل مسئله } ۱۷ \quad ۱۸.$$

$$f(x, y, z) = \frac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}, D = \{(x, y, z): x^2 + 4y^2 + 4z^2 \leq 1\} \quad ۱۹.$$

$$f(x, y, z) = \ln xyz, D = \{(x, y, z): (x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 < 1\} \quad ۲۰.$$