

مشتقات جزئی:

حال بحث مشتق یک تابع چند متغیره مطرح می شود. مسلماً مشتق یک تابع چند متغیره نیز مانند همان، با مشتق تابع حقیقی متفاوت است. اینکه نسبت به کدام متغیره و چگونه مشتق بگیریم مسئله ای است.

فرض کنید f یک تابع دو متغیره باشد که در هر یک نقطه (a, b) تعریف شده است. مشتق جزئی f نسبت به x در نقطه (a, b) به صورت زیر تعریف شده و نمایش داده می شود.

$$\text{مشتق جزئی } f \text{ نسبت به } x \text{ در } (a, b) = f_x(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

↑
نسبت به x
در (a, b)

و مشتق جزئی f نسبت به y در نقطه (a, b) به صورت زیر تعریف شده و نمایش داده می شود.

$$\text{مشتق جزئی } f \text{ نسبت به } y \text{ در } (a, b) = f_y(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$$

↑
نسبت به y
در (a, b)

اگر محدود بالا محدود و خاص تر باشند به ترتیب گوئیم مشتق جزئی f نسبت به x در (a, b) و نسبت به y در (a, b) وجود دارند.

یا بیاوریم در توابع حقیقی "ششم"

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (\text{توضیح: رشته در فیل محلی "تغییری"})$$

همانند توابع حقیقی نیاز به نسبت کمبود گرفتن مشتقات جزئی را رعایت نمائیم. نکته کلیدی مانند نقطه (a, b) در بقیه موارد همانند (a, b) ، کافیست از تابع مشتق بگیریم و بعد نقطه را جایگزین نمائیم.

اما جهت بدست آوردن مشتق جزئی تابع دو متغیره $f(x, y)$ نسبت به x ، کافیست از تابع نسبت به x مشتق بگیریم و در این روند y را ثابت (عدد) فرض می کنیم و در آخر بدست آوردن مشتق جزئی نسبت به y ، کافیست از تابع نسبت به y مشتق بگیریم و در این روند x را ثابت (عدد) فرض کنیم. به مثال فکر کنید و نتیجه نمائید.

مثال ۱ اگر $f(x, y) = xe^{xy}$ ، آن گاه

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \underbrace{1}_{\text{مشتق } x} \times e^{xy} + \underbrace{x \times (y)}_{\text{مشتق } e^{xy} \text{ به } x} \times e^{xy} = e^{xy} + xy e^{xy} \quad (y \text{ عدد فرضی شود})$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \underbrace{x \times (x)}_{\text{مشتق } e^{xy} \text{ به } y} \times e^{xy} = x^2 e^{xy} \quad (x \text{ عدد فرضی شود})$$

مثال ۲ اگر $g(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$ ، آن گاه

$$g_x = \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{y} \times e^{\frac{x}{y}}$$

$$g_y = \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \times e^{\frac{x}{y}}$$

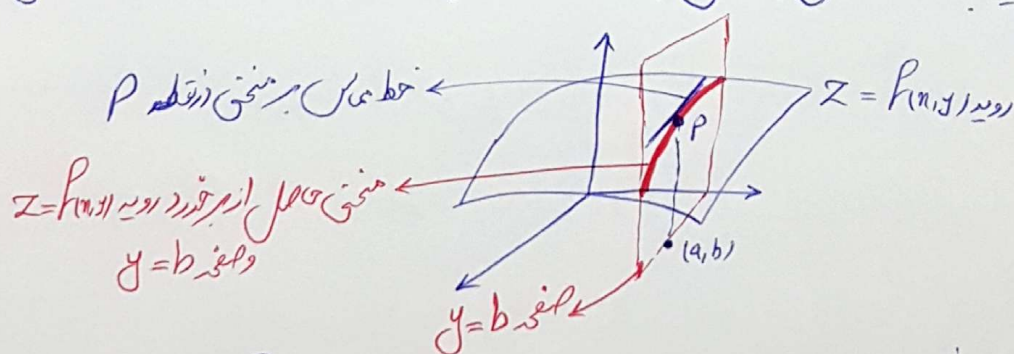
یاد آوری: $(e^u)' = u' e^u$

تعریف مشتق جزئی:

در توابع حقیقی، مشتق یک تابع در یک نقطه در واقع شیب خط مماس در آن نقطه بود. حال تغییر کنیم.
مشتق جزئی f_x, f_y تابع دو متغیره $f(x, y)$ در نقطه (a, b) بیان می کنند.

اگر $f(x, y)$ در یک کمره (a, b) تعریف شده باشد و $P = (a, b, f(a, b))$ روی صفحه $z = f(x, y)$ باشد، آن گاه

$f_x(a, b)$ در واقع شیب خط مماس بر منحنی بدست آمده از بر خورد رویه $z = f(x, y)$ با صفحه $y = b$ است. نقطه P



و به طور مشابه $f_y(a, b)$ در واقع شیب خط مماس بر منحنی بدست آمده از برخورد رویه $z = f(x, y)$ با صفحه $x = a$ است. نقطه P است.

مشتق جزئی مرتب به بالا:

مشتق جزئی مرتب به بالا همان مفهوم مشتق مرتب به بالا در تابع حقیقی است، اما با این تفاوت که اگر شما از مشتق جزئی f_x دوباره می‌توانید نسبت به x یا نسبت به y مشتق بگیرید و این روند ادامه دارد.

$$\text{مشتق جزئی } f_x \text{ نسبت به } x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xx}$$

(توضیح در مورد علامت جزئیات در نایل صحت، تقدیری)

$$\text{مشتق جزئی } f_x \text{ نسبت به } y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yy}$$

$$\text{مشتق جزئی } f_y \text{ نسبت به } x = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yx}$$

$$\text{مشتق جزئی } f_y \text{ نسبت به } y = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{ny}$$

همچنین می‌توانید فرمول‌های دیگر مشتق جزئی بجای برداشت کنید

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

در این علامت مرتب مشتق بگیر از درون علامت به چپ است یعنی

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

مرتب مشتق بگیر جزئی

اما f_{ny} نیز یعنی دوباره مشتق جزئی گرفته شده، اما اینجا در این علامت مرتب مشتق بگیر جزئی از چپ به راست

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{ny}$$

در هر حالت داریم

یعنی ابتدا از علامت نسبت به x مشتق جزئی می‌گیریم پس از علامت نسبت به y مشتق جزئی می‌گیریم.

در صورت داشتن شرایط (درجه مشتق جزئی) می‌توان روند مشتق‌گیری جزئی را ادامه داد. مثلاً

$$f_{xyx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \text{مشتق جزئی سوم که به ترتیب نسبت به } x, y, x \text{ و به } x$$

$$f_{xxy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \text{مشتق جزئی سوم که به ترتیب نسبت به } x, x, y \text{ و به } y$$

بجز $\partial x \partial x$ ، ∂x^2 نداشته‌اند در f_{xxy} را f_{xyx} می‌نویسند

$$f_{xxyy} = \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2} = \text{مشتق جزئی چهارم که به ترتیب نسبت به } x, x, y, y \text{ و به } y$$

$\xrightarrow{\text{ترتیب مشتق جزئی دیگر}} \quad \xrightarrow{\text{ترتیب مشتق جزئی دیگر}}$

مثال: بجز $f(x, y) = xy \ln x \quad (x > 0)$

$$f_x = y \ln x, \quad f_y = x \ln x, \quad f_z = \frac{xy}{x}$$

$$f(x, y) = xy \ln x \quad (x > 0)$$

$$f_x = y \ln x + \frac{xy}{x} = y \ln x + y$$

$$f_y = x \ln x$$

$$f_{xx} = \frac{y}{x}, \quad f_{xy} = \ln x + 1$$

$$f_{yy} = 0, \quad f_{yx} = \ln x + 1, \quad f_{xxy} = \frac{1}{x}, \quad f_{xnn} = -\frac{y}{x^2}$$

$$f_{nxyx} = -\frac{1}{x^2}, \quad \dots$$

وقت کنید که دست کلی از f_{yx} و f_{xy} هم می‌گیرند بعداً در این مورد مجدداً بحث خواهیم کرد.

بحث مشتق جزئی را به طور مشابه بر تابع سه متغیره $f(x, y, z)$ نیز می‌توان تعریف و تعمیم داد.

اگر $f(x, y, z)$ را در هر یک از (a, b, c) مرتبه ششم تا آن گاه تعریف می‌کنیم

$$\text{مشتق جزئی نسبت به } x \text{ در } P = (a, b, c) = f_x(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b, c) - f(a, b, c)}{h}$$

$$\text{مشتق جزئی نسبت به } y \text{ در } P = (a, b, c) = f_y(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h, c) - f(a, b, c)}{h}$$

$$\text{مشتق جزئی نسبت به } z \text{ در } P = (a, b, c) = f_z(P) = \frac{\partial f}{\partial z}(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b, c+h) - f(a, b, c)}{h}$$

و اگر عدد n به هر عدد باشد که n به مرتبه مشتق جزئی نسبت به x, y, z در P وجود دارند

همچنین به طور مشابه برای f_n که نسبت به (x, y, z) ثابت (عدد) فرض می‌کنیم که z

نسبت به n مشتق بگیریم و همین طور برای f_y و f_z به طور مشابه. مشتق مرتبه n از $f(x, y, z)$ نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند.

مثال: اگر $f(x, y, z) = xyz \ln z$ که $z > 0$ آن گاه داریم

$$f_x = y \ln z, \quad f_y = x \ln z, \quad f_z = \frac{xy}{z}$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad f_{yy} = 0, \quad f_{zz} = -\frac{xy}{z^2}, \quad f_{xy} = \ln z, \quad f_{yn} = \ln z$$

$$f_{xz} = \frac{y}{z}, \quad f_{yz} = \frac{x}{z}, \dots$$

مثال: اگر $U = x^2 - 2xy^2$ ، نشان دهید: $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$

حله: $U_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 2x - 2y^2$, $U_y = \frac{\partial U}{\partial y} = -4xy$

$U_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2$, $U_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2$

$\Rightarrow U_{xx} + U_{yy} = 2 + (-2) = 0 \checkmark$

مثال: اگر $U = x^{xyz}$ ، نشان دهید: U_{xzy}

$U = x^{xyz} \rightarrow U_x = yz \times x^{xyz} \ln x$

حله: $(a^u)' = u a^u \ln a$

$U_{xz} = y \times x^{xyz} \ln x + yz \times (xy) \times x^{xyz} (\ln x) \times \ln x$
 مشتق yz نسبت به x مشتق x^{xyz} نسبت به x

$\Rightarrow U_{xz} = y x^{xyz} \ln x + xy^2 z x^{xyz} (\ln x)^2$

$\Rightarrow U_{xzy} = \frac{\partial}{\partial y} [y x^{xyz} \ln x + xy^2 z x^{xyz} (\ln x)^2]$
 مشتق y نسبت به y مشتق x^{xyz} نسبت به y مشتق $xy^2 z$ نسبت به y
 $= x^{xyz} \ln x + yx(xz) x^{xyz} \ln x \times \ln x + 2xy z x^{xyz} (\ln x)^2 + xy^2 z \times (xz) x^{xyz} \ln x \times (\ln x)^2$
 مشتق x^{xyz} نسبت به y مشتق x^{xyz} نسبت به y

مثال: اگر $U = x^2 - 4x^2 y^2 + y^4$ ، $V = 4x^2 y - 4xy^3$ ، نشان دهید: $U_x = V_y$ و $U_y = -V_x$

$U_x = 2x - 8xy^2$, $U_y = -8xy^2 + 4y^3$

$V_x = 4xy - 4y^3$, $V_y = 4x^2 - 12xy^2$

$U_x = V_y$

$-U_y = V_x \checkmark$

تمام مشتقات جزئی اول تابع داده شده را بیابید.

$$f(x, y) = x^2 y^3 - x^3 y^4 \quad . ۱$$

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x - y} \quad . ۲$$

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad . ۳$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} \quad . ۴$$

$$f(x, y) = \ln(x^3 - y^2) \quad . ۵$$

$$f(x, y) = e^{-x/y} \quad . ۶$$

$$f(x, y) = e^{\sin xy} \quad . ۷$$

$$f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \quad . ۸$$

$$g(u, v) = \tan(u^2 - v) \quad . ۱۰$$

$$f(s, t) = \arctan \frac{t}{s} \quad . ۹$$

$$k(x, y) = \cos \frac{x}{y} \sin \frac{y}{x} \quad . ۱۲$$

$$h(x, y) = \ln(x + \ln y) \quad . ۱۱$$

$$f(x, y) = 10^{xy} \quad . ۱۴$$

$$f(x, y) = x^y \quad . ۱۳$$

مشتقات جزئی. دوم z_{xx} ، $z_{xy} = z_{yx}$ ، و z_{yy} تابع داده شده را بیابید.

$$z = x^3 \sin y + y^3 \cos x \quad . ۲۸$$

$$z = x^4 y^2 - 3x^2 y^3 + 6xy \quad . ۲۷$$

$$z = \ln(x^2 + y^2) \quad . ۳۰$$

$$z = e^{x^2 y} \quad . ۲۹$$

$$z = \arctan xy \quad . ۳۲$$

$$z = \sin^2(3x - 4y) \quad . ۳۱$$

$$u_{xxy} \text{ را به ازای } u = 2^{xy} \text{ بیابید.} \quad . ۳۳$$

$$v_{yxx} \text{ را به ازای } v = \cos(x + \sin y) \text{ بیابید.} \quad . ۳۴$$

$$\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} \text{ را به ازای } u = x^m y^n \text{ بیابید.} \quad . ۳۵$$

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2} \text{ را به ازای } u = \sin^2 x \cos^2 y \text{ بیابید.} \quad . ۳۶$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} \text{ را به ازای } u = \sin xy + \cos xz + \tan yz \text{ بیابید.} \quad . ۳۷$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial x \partial y} \text{ را به ازای } w = \frac{x}{y+z} \text{ بیابید.} \quad . ۳۸$$

مشتق پذیری:

در تابع حقیقی (یک متغیره) گوئیم f در a مشتق پذیر است اگر $f'(a)$ موجود باشد. در ضمن ثابت می شود که

مشتق پذیر f در a ، یکتا $f'(a)$ را نتیجه می دهد. در تابع چند متغیره مثال کار و جواب دارد که وجود مشتق جزئی تابع

در یک نقطه، یکتا بودن آن نقطه را نتیجه نمی دهد. لذا مشتق پذیر یک تابع چند متغیره در یک نقطه را وجود مشتق جزئی آن در آن نقطه تعریف نمی کنند. باید مشتق از جزئیات گوئیم

$P(x,y)$ که در (a,b) تعریف شده است در نقطه (a,b) مشتق پذیر است اگر داشته باشیم

$$\Delta P = P(a+\Delta x, b+\Delta y) - P(a,b) = P_x(a,b)\Delta x + P_y(a,b)\Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y$$

که در آن α و β تابعی مرتبه دوم بوده و $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \alpha(\Delta x, \Delta y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0$

علاوه بر این می توانیم تعریف می کنیم

$$dP = P_x dx + P_y dy$$

ثابت می شود که اگر $P(x,y)$ برای (a,b) مشتق پذیر باشد آنگاه P در (a,b) پیوسته بوده

و $P_x(a,b)$ و $P_y(a,b)$ نیز وجود دارند.

مثال: مشتق پذیر تابع $P(x,y) = 4x^2 - 2xy$ را در نقطه (a,b) بررسی کنید.

$$\Delta P = P(a+\Delta x, b+\Delta y) - P(a,b) = 4(a+\Delta x)^2 - 2(a+\Delta x)(b+\Delta y) - (4a^2 - 2ab)$$

$$= 4(a^2 + 2a\Delta x + (\Delta x)^2) - 2(ab + a\Delta y + b\Delta x + \Delta x\Delta y) - 4a^2 + 2ab$$

$$= 8a\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 2a\Delta y - 2b\Delta x - 2\Delta x\Delta y$$

$$P_y(a,b) = -2a \text{ و } P_x(a,b) = 8a - 2b \quad \text{پس} \quad P_y = -2x \text{ و } P_x = 8x - 2y$$

$$\Delta f = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b) = \underbrace{(1a-2b)}_{f_x(a,b)} \Delta x - \underbrace{2a}_{f_y(a,b)} \Delta y + (\Delta x)^2 - 2\Delta x \Delta y$$

$$= f_x(a,b) \Delta x + f_y(a,b) \Delta y + (\Delta x)^2 - 2\Delta x \Delta y$$

در این صورت

$$\begin{cases} \alpha(\Delta x, \Delta y) = \Delta x \\ \beta(\Delta x, \Delta y) = -2\Delta x \end{cases}$$

کافیت انتخاب کنیم

$$\Delta f = f_x(a,b) \Delta x + f_y(a,b) \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y$$

و $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \alpha(\Delta x, \Delta y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0$

پس $f(x,y)$ در (a,b) مشتق پذیر است.

نکته قابل ذکر اینکه در تعریف مشتق پذیر $f(x,y)$ در (a,b) ، α و β دلخواه هستند و هیچ فرقی ندارند. مثلاً

در مثال بالا می توانیم قرار دهیم

$$\begin{cases} \alpha(\Delta x, \Delta y) = \Delta x - \Delta y \\ \beta(\Delta x, \Delta y) = 0 \end{cases}$$

آینده مهم است؛ از آنجمله که $\Delta f = f_x(a,b) \Delta x + f_y(a,b) \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y$ برقرار باشد و

$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \alpha = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \beta = 0$

نکته (ضد): اگر $f(x,y)$ در مشتق جزئی پیوسته در نقطه (a,b) باشد؛ آن گاه f در (a,b) پیوسته است و اگر مشتق جزئی مطلق پیوسته باشند؛ آن گاه $f_{xy} = f_{yx}$.

از هفتم و فصل مشتق پذیر به صورت زیر برای تقریب نیز استفاده می شود

$$\Delta f = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a, b) \approx f_x(a, b) \Delta x + f_y(a, b) \Delta y$$

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) \approx f(a, b) + f_x(a, b) \Delta x + f_y(a, b) \Delta y$$

مثال: $\sqrt{(2,91)^2 + (4,04)^2}$ را تقریب بزنید

جواب: قرار می دهیم $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $a = 2$ ، $\Delta x = -0.09$ ، $b = 4$ ، $\Delta y = 0.04$

در این صورت $f(a+\Delta x, b+\Delta y) = f(2,91, 4,04) = \sqrt{(2,91)^2 + (4,04)^2}$

از طرفی $f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ، $f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ لذا به کمک روش مشتق تقریب می دهیم

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) \approx f(2, 4) + f_x(2, 4)(-0.09) + f_y(2, 4)(0.04)$$

$$= \sqrt{4+16} + \frac{2}{\sqrt{4+16}} \times (-0.09) + \frac{4}{\sqrt{4+16}} \times (0.04)$$

$$= 2 - \frac{0.18}{2} + \frac{0.16}{2} = 2 + \frac{0.04}{2} = 2.02$$

مثال: دینامیک کل تابع $f(x, y, z) = \frac{x+y}{y+z}$ را بیابید

جواب: داریم $df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$ و لذا برای تابع سه متغیره به صورت

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

$$\Rightarrow df = \left(\frac{1}{y+z}\right) dx + \frac{(y+z) - (x+y)}{(y+z)^2} dy + \frac{-(x+y)}{(y+z)^2} dz = \dots$$

دیفرانسیل کل تابع داده شده را بیابید .

$$f(x, y) = x^2y - xy^3 + x^3y^2 \quad . ۳$$

$$f(x, y) = \tanh^{-1} \frac{x}{y} \quad . ۵$$

$$f(x, y) = \frac{xy}{x - y} \quad . ۴$$

$$g(s, t) = e^{st} \quad . ۷$$

$$f(x, y) = \operatorname{arccot} \frac{y}{x} \quad . ۶$$

$$f(x, y, z) = 2^x 3^y 4^z \quad . ۹$$

$$h(u, v) = \ln \sqrt{u^2 + v^4} \quad . ۸$$

$$f(x, y, z) = \frac{x + y}{y + z} \quad . ۱۱$$

$$f(x, y, z) = x^{yz^2} \quad . ۱۰$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n \quad . ۱۳$$

$$g(s, t, u, v) = s^2 t^{-1} u^3 v^{-4} \quad . ۱۲$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 10^{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \quad . ۱۴$$

۱۵ . با استفاده از دیفرانسیلها ، تغییر

$$f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$$

۱۶. را به ازای تغییر (x, y) از $(1, 1)$ به $(0.96, 1.03)$ تخمین بزنید .
با استفاده از دیفرانسیلها ، تغییر

$$f(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

را به ازای تغییر (x, y, z) از $(2, 3, 4)$ به $(2.01, 3.02, 3.97)$ تخمین بزنید .
کمیات زیر را با استفاده از دیفرانسیلها تخمین بزنید .

$$\sqrt{(1.06)^2 + (1.97)^3} \quad \cdot ۱۸$$

$$(1.002)(2.003)^2(3.004)^3 \quad \cdot ۱۷$$

$$\sin 31^\circ \cos 58^\circ \quad \cdot ۲۰$$

$$(0.98)^{1.05} \quad \cdot ۱۹$$

$$\sqrt[4]{0.97} \sqrt[3]{(1.04)^2} \quad \cdot ۲۲$$

$$\ln (\sqrt{1.04} + \sqrt[3]{1.08} - 1) \quad \cdot ۲۱$$