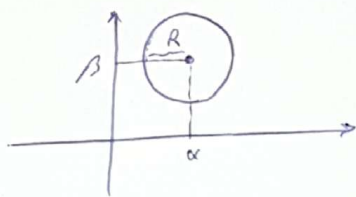
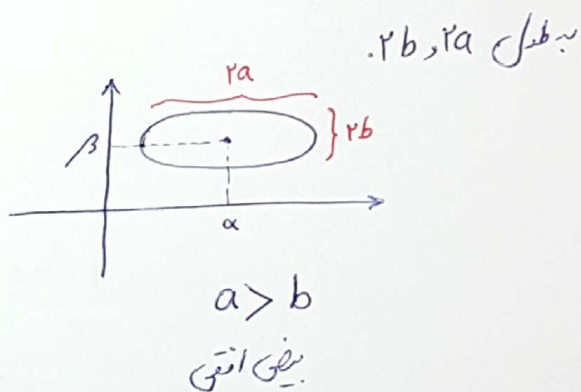
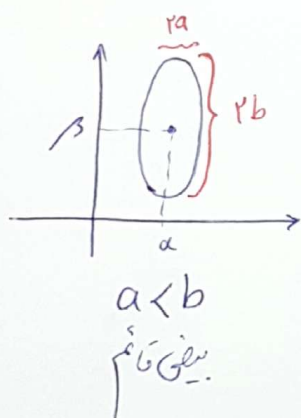


مقاطع مخروطی: در این جلسه ابتدا منحنی‌های مخروطی را از دید هندسی یادآور می‌کنیم و بعد این منحنی‌ها را در فضای سه بعدی تحت قالب رویه مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱. دایره: فرمول کلی دایره به شکل $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$ است. دایره با مرکز (α, β) و شعاع R در یک صفحه دایره به شکل زیر می‌گردد.

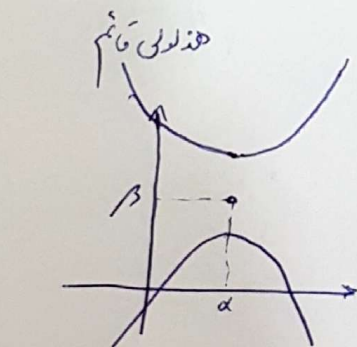
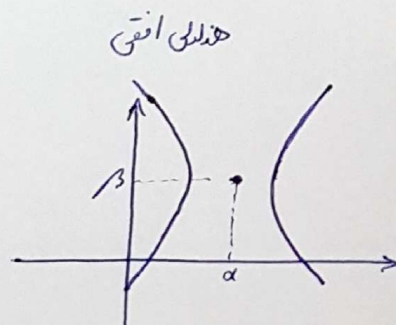


۲. بیضی: فرمول کلی بیضی به صورت $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ است. بیضی با مرکز (α, β) و دقت کنید



۳. هذلولی: فرمول کلی هذلولی به صورت

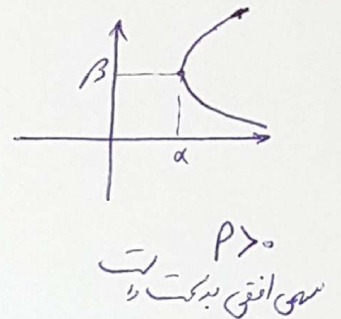
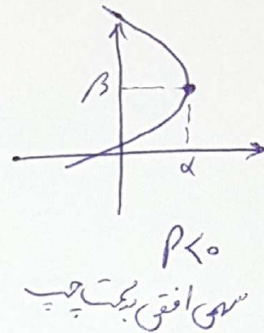
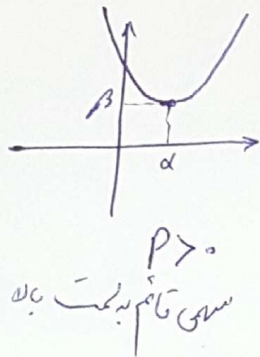
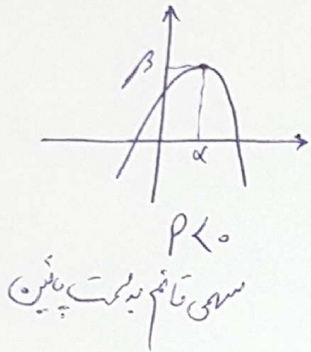
$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \quad \text{هذلولی افقی}$$



۴ سهمی: قوس کل سهمی به مرکز (α, β) به صورت

$$(x-\alpha)^2 = 4p(y-\beta) \quad \text{یا} \quad (y-\beta)^2 = 4p(x-\alpha)$$

سهمی قائم سهمی افقی



معادله کلی مقاطع مخروطی به صورت

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{است.}$$

B عامل دور است که در بحث ما $B=0$ است. لذا

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{می شود}$$

که بسته به ضرایب A, C, D, E, F هر کدام از ۱ مقاطع مخروطی ذکر شده را نتیجه می دهد.

گاهی نیز ممکن است یک مقطع مخروطی نباشد؛ مثلاً

$$x^2 + y^2 = 0 \quad (A=C=1, D=E=F=0) \quad \text{که فقط نقطه } (0,0) \text{ را نتیجه می دهد.}$$

$$-x^2 - 2y^2 - 4 = 0 \quad \left(\begin{matrix} A=-1 & D=E=0 \\ B=-2 & F=-4 \end{matrix} \right) \quad \text{یا} \quad \text{که هیچ جوابی ندارد و متناهی می باشد.}$$

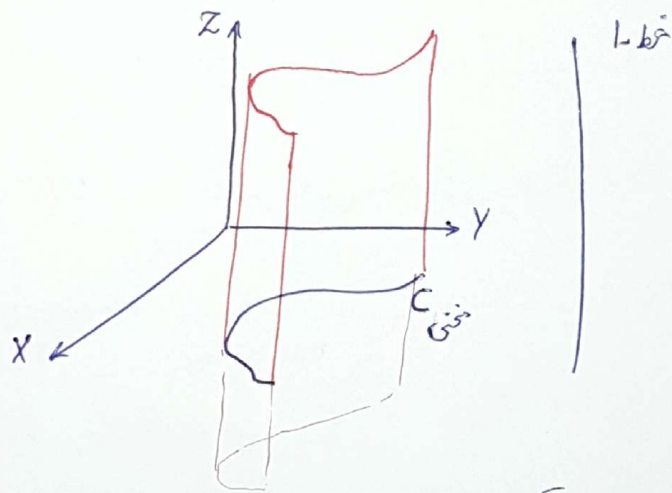
پس: چرا به نام بیضی، هذلولی و سهمی مقاطع مخروطی گذاشته اند؟
(در نایل تقدیر می گذرانم)

حال به مفهوم رویه در فضای سه بعدی می پردازیم.

در حالت قبل با فضای سه بعدی و مختصات کلی آن و همچنین معادلات خط و سطح در فضای سه بعدی آشنا شده ایم.

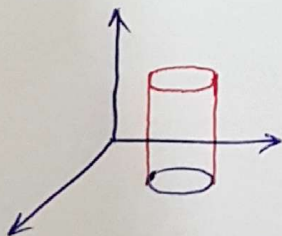
اشکال در فضای سه بعدی را رویه گوئیم که برخی از معاین آن را در این دست بنویسند و برخی می خوانیم. از رویه در فصل بعد استاندارد خواهیم کرد.

۱. استاندارد: فرض کنید C یک منحنی در یک صفحه باشد و L خطی که با صفحه منتهی موازی است. سطح ساخته شده از تمام خطوط گذرا بر C موازی L را استاندارد گوئیم. به عبارت دیگر استاندارد مذکور از آن قرار می گیرد که منحنی C در آن خط L به دست می آید.



در بحث ما منحنی C در یکی از صفحات XY یا XZ یا YZ قرار دارد و خط L به ترتیب محور Z یا محور Y یا محور X است. مانند شکل زیر به گونه C در صفحه XY قرار دارد و خط L محور Z یا موازی آن است.

همان گونه که توجه می کنید شکل سه بعدی است، ممکن است در بیشتر مواقع شبیه آنرا در یک صفحه در ذهن داریم نباشد. هر چند خود استاندارد (مستدیر قائم) نیز از آن قرار می گیرد و در صفحه XY در آن محور Z به دست می آید و این اسم از همین جا انتخاب شده است.



معادله استوانه:

معادله استوانه در حالت خاص که معادله استوانه در یک صفحه از فضای سه بعدی قرار دارد و امتداد در آن محورهای به صورت جدول زیر است.

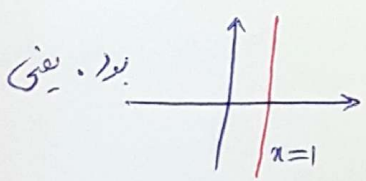
صفحه که منحنی C در آن است	معادله منحنی C در صفحه که قرار دارد	محور که در آن امتداد پیدا می کند	معادله استوانه در صفحه سه بعدی
صفحه XY	$F(x, y) = 0, z = 0$	محور Z	$F(x, y) = 0$
صفحه XZ	$F(x, z) = 0, y = 0$	محور Y	$F(x, z) = 0$
صفحه YZ	$F(y, z) = 0, x = 0$	محور X	$F(y, z) = 0$

در جدول بالا، $F(x, y) = 0$ یعنی معادله منحنی C فقط در آن صفحه سه بعدی وجود ندارد.

$F(x, y) = 0, z = 0$ یعنی همان $z = 0$ پس منحنی C در صفحه XY که در آن صفحه سه بعدی قرار دارد.

در جدول آخر $F(x, y) = 0$ در صفحه سه بعدی، یعنی همان معادله z ندارد پس z در آن صفحه سه بعدی معنی ندارد.

امتداد منحنی C در آن محور Z را می دهد.



یا داده می کنیم: در دیتال داشته که داخل $x=1$ معادله خط

اینجا هم x ثابت بردار می که در معادله خط نباشد و نخواهد بود و لذا خط در نقطه $x=1$ در آن محور x امتداد پیدا می کند.

برای رسم یک استوانه در صفحه سه بعدی، ابتدا منحنی C را در صفحه آن رسم می کنیم و سپس آن را در آن محور متغیر x امتداد می دهیم.

به مثال اگر صفحه سه بعدی را در نظر بگیریم.

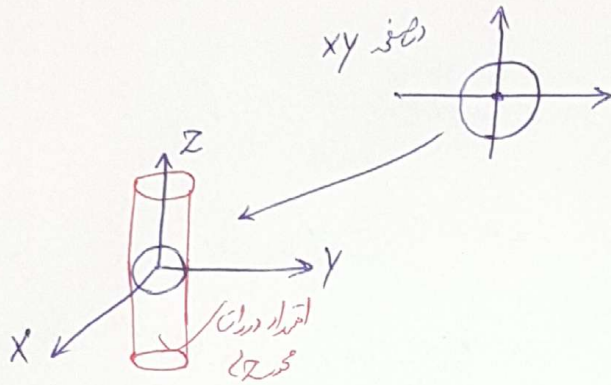
$$(1) \quad x^2 + y^2 = 4$$

جواب : چون z ندارد پس استاندارد است که از مقدار منفی دهی دهی دهی xy در امتداد محور z بدست آمده است.

$$x^2 + y^2 = 4 \text{ دهی دهی } xy \text{ دامنه است پس}$$

(توپی است در فضا)

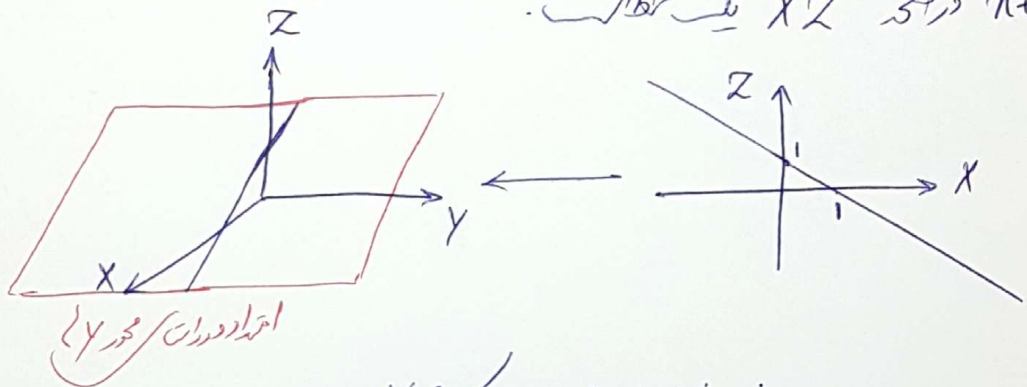
بدین استاندارد، استاندارد متغیر قائم گویند.



$$(2) \quad x + z = 1$$

جواب : چون y ندارد استاندارد است که از مقدار منفی دهی دهی دهی xz در امتداد محور y بدست آمده است.

$$x + z = 1 \text{ دهی دهی } xz \text{ یک خط است.}$$

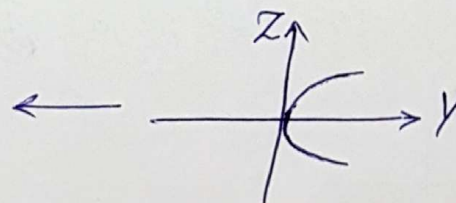
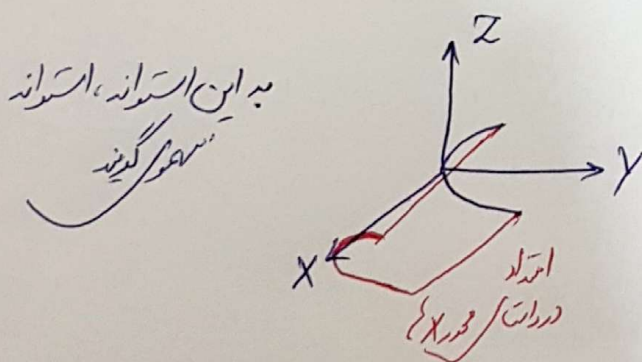


بدین شکل استاندارد در واقع یک خط است.

$$(3) \quad y = z^2$$

جواب : چون x ندارد، پس استاندارد است که از مقدار منفی دهی دهی دهی yz در امتداد محور x بدست آمده است.

$$y = z^2 \text{ دهی دهی } yz \text{ یک سهمی است.}$$



۲ سطح درجه دو که معادله کلی آن به صورت

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

است.

سطح درجه دو به صورت کلی به دسته ای زیر تقسیم می شوند. مرکز آن این سطح نقطه (α, β, γ) در نظر گرفته می شود. برای رسم این سطح درجه دو، ما طبقه دوم را برای حالتی که $\alpha = \beta = \gamma = 0$ است بررسی کنیم بعد از آن می توان شکل بدست آمده را با انتقال از مرکز (α, β, γ) به مرکز $(0, 0, 0)$ رسم نمود.

الف) نکته: معادله کلی که $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$ است.

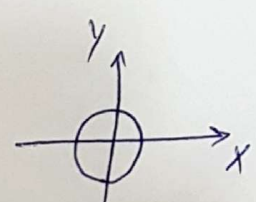
که در این مرکز (α, β, γ) شعاع R .

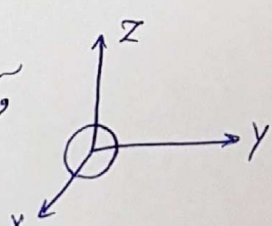
برای رسم که $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

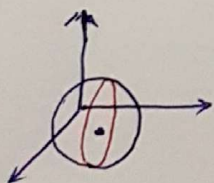
یکی از متغیرها درجه دو (x, y, z) را صفر قرار داده معادله دایره بدست آمده را می کشیم پس دایره را محول می کنیم از متغیرهای دیگر دوران می دهیم.

مثال: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$

ابتدا در نظر می گیریم $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

تک بعدی هم $x^2 + y^2 = 25$ در رسم می کنیم $z=0$ 

و آن را محول می کنیم دوران می دهیم. حل شکل لازم (0, 0, 5) به (0, 0, -5) انتقال می دهیم. 



(ب) بیضی گویان: معادله کلی

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} + \frac{(z-\gamma)^2}{c^2} = 1$$

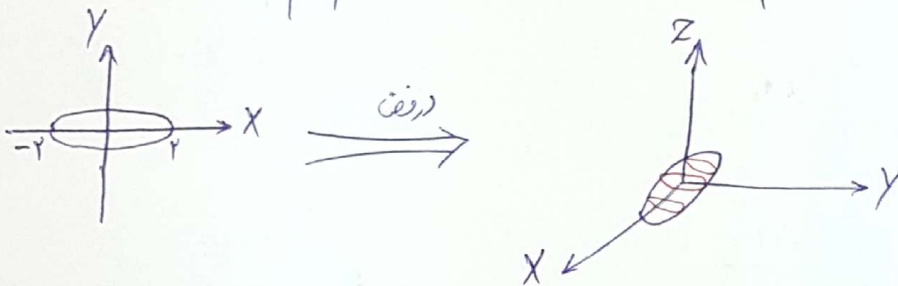
اگر $a=b=c$ تبدیل به کُره می‌شود و اگر $a=b+c$ یا $a=c+b$ یا $b=c+a$ به آن کُره گویان گویند.

طریقہ رسم: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

یکی از مختصات درجه دو را صفر قرار داده، بیضی حاصل را در صفحه آن رسم می‌کنیم. سپس آن را حول محور یکی از مختصات بچرخانیم و در آن می‌بینیم.

مثال: $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$

قراری هم $z=0$ داریم $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ دایره xy ، بیضی را رسم می‌کنیم.



(ج) هندل گویان بیضی: معادله کلی

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} - \frac{(z-\gamma)^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} + \frac{(z-\gamma)^2}{c^2} = 1$$

$$-\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} + \frac{(z-\gamma)^2}{c^2} = 1$$

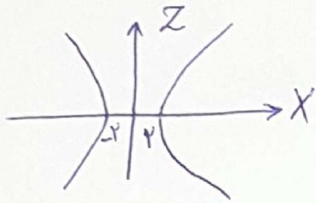
(یکی از مختصات درجه دو را صفر قرار داده، بیضی حاصل را در صفحه آن رسم می‌کنیم و دوباره دایره را در آن می‌بینیم)
دقت کنید جهت دایره را در نظر بگیرید

طریقہ رسم: در حالت $\alpha=\beta=\gamma=0$

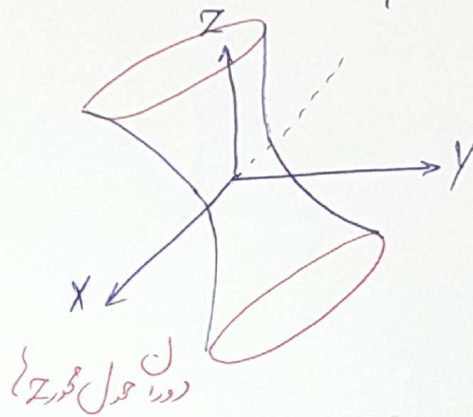
یکی از مختصات درجه دو را با علامت مثبت و منفی می‌کنیم. هندل را به دست آورده و در صفحه آن رسم کرده و سپس آن را حول محور مختصات بچرخانیم و در آن می‌بینیم.

مثال: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$

قرار می دهیم $y=0$ داریم $\frac{x^2}{4} - z^2 = 1$. در صفحه XZ هندل را رسم می کنیم (توضیح: در فضا هندل هائی نداریم)



در فضا



معادله کلی $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} - \frac{(z-\gamma)^2}{c^2} = 1$

(> هندل را گویان رویا چیه:

یا $-\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} - \frac{(z-\gamma)^2}{c^2} = 1$

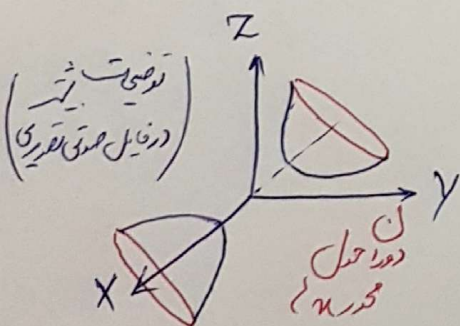
(یکی از تنه های دو رجه دو، فیش
ثابت و دورای دیگر منفی هستند
توجه کنید که راست ساد یک باشد

یا $-\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} + \frac{(z-\gamma)^2}{c^2} = 1$

طریقه رسم: در حالت $\alpha=\beta=\gamma=0$

یکی از تنه های دو رجه دو، با فرض مثبت منفی را منفی قرار داده و هندل را در صفحه آن رسم می کنیم پس آن هندل را حول محور تنه های دو رجه دو ثابت دور می دهیم.

مثال: $x^2 - y^2 - z^2 = 1$



قرار می دهیم $z=0$ داریم $x^2 - y^2 = 1$. در صفحه XY هندل را رسم می کنیم . و آن را به فضا برده و دورای دو رجه دو می دهیم.

(۵) مخروط بیضی :

معادله کلی

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} - \frac{(z-\gamma)^2}{c^2} = 0$$

یا

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} + \frac{(z-\gamma)^2}{c^2} = 0$$

یا

$$-\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} + \frac{(z-\gamma)^2}{c^2} = 0$$

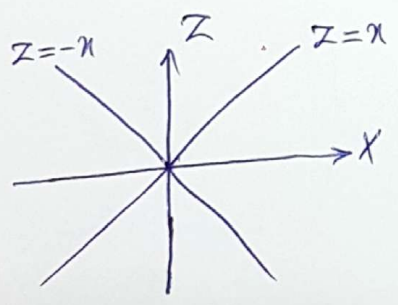
یکی از تنفرها درجه دوم است
آن منفی و دو تا دیگر مثبت است
یا یکی مثبت و دو تا دیگر منفی
(فقط یک جهت راستی در این معادله داریم)

طریقه رسم : در حالت $\alpha=\beta=\gamma=0$

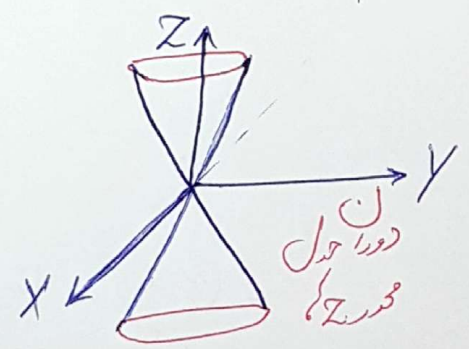
یکی از دو تنفر با فضا مثبت را منفی قرار می دهیم. خط بیضی است که در این سیستم کروی پس از احوال مخروط تنفر
با درجه منفی دور می دهیم.

مثال : $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

قرار می دهیم $y=0$ داریم $x^2 - z^2 = 0$ در نتیجه $x^2 = z^2$ یا $x = \pm z$ این دو خط را در فضا
رسم می کنیم و بعد حول محور z می گردانیم.



در فضا



دور حول
محور z

(۶) سهمی گوی بیضی :

معادله کلی

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = z-\gamma$$

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(z-\gamma)^2}{c^2} = y-\beta$$

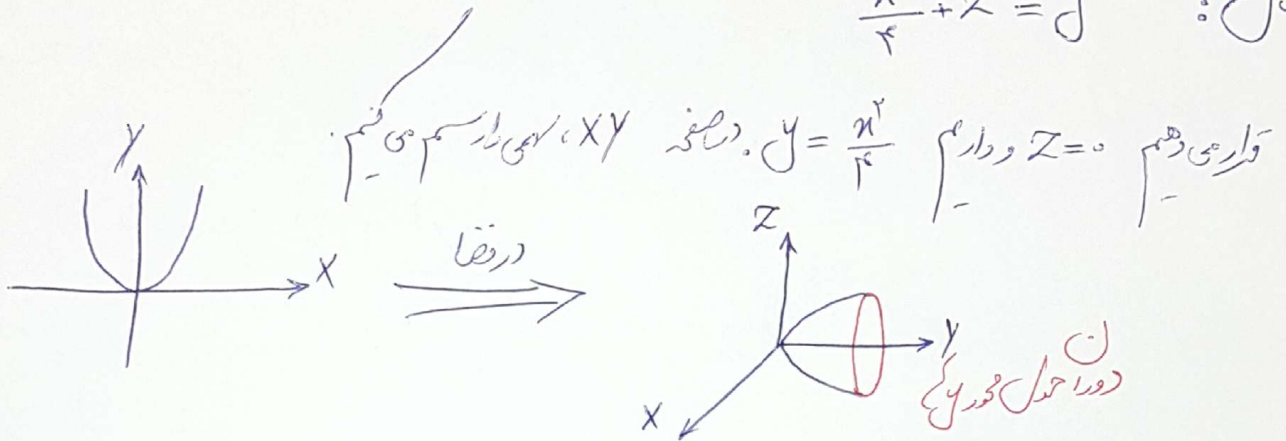
$$\frac{(y-\beta)^2}{b^2} + \frac{(z-\gamma)^2}{c^2} = x-\alpha$$

یکی از تنفرها درجه یک و دو تا درجه دوم است جمع می بینیم آن
⑨

طریقه رسم: در حالت $\alpha = \beta = \gamma = 0$

یکی از متغیرهای دیگر را در معادله قرار داده، سهمی بدست آمده را در صفحه آن رسم می نمایم. سپس آن محل محور متغیر دیگر را در یک دور از دور می رسم.

$$\text{مثال: } \frac{x^2}{4} + z^2 = y$$



۱) سهمی گویان هذلولوی یا رویه زین ابی: معادله کلی

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = z-\gamma$$

$$-\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = z-\gamma$$

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(z-\gamma)^2}{c^2} = y-\beta$$

$$-\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(z-\gamma)^2}{c^2} = y-\beta$$

$$\frac{(y-\beta)^2}{b^2} - \frac{(z-\gamma)^2}{c^2} = x-\alpha$$

$$-\frac{(y-\beta)^2}{b^2} + \frac{(z-\gamma)^2}{c^2} = x-\alpha$$

یکی از متغیرهای دیگر را در معادله قرار داده، دو متغیر دیگر را در یک دور از دور می رسم. سپس آن محل محور متغیر دیگر را در یک دور از دور می رسم.

طریقہ رسم: درجہات $\alpha = \beta = \gamma = 0$

صفر قرار دادن متغیر درجه دو با ضرب مثبت = محل نشستن سوارکار
صفر قرار دادن متغیر درجه دو با ضرب مثبت = محل قرار گرفتن زین سوار ارب

عدد قرار دادن به متغیر درجه یک = دو طرف پهلوی زین

عدد قرار دادن به متغیر درجه دو با ضرب مثبت = دو طرف جلو و عقب زین

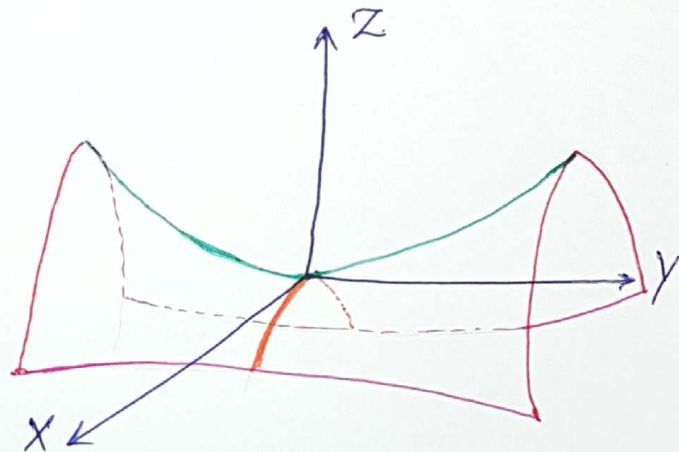
$$y=0 \Rightarrow z=x^2$$

$$x=0 \Rightarrow z=-y^2$$

$$z=t \Rightarrow x^2-y^2=t$$

$$x=s \Rightarrow z-s=-y^2$$

$$z = x^2 - y^2$$



چنین شکل شبیه زین ارب است به سهی گدن هذلولی، زین ایسی نیز می گردند.

در نهایت سطح درجه دو، ممکن است بیاه ثره نیز باشد. مانند

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Rightarrow x = y = z = 0 \quad \text{مبداء}$$

$$x^2 + y^2 + 4 = 0 \Rightarrow \text{تخلی}$$

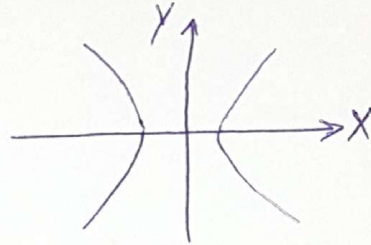
وغیره

مثال: مجذورار معادله داده شده را در صفحه رسم نموده و آن را ذکر کنید.

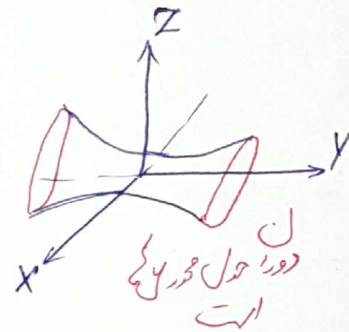
$$2x^2 - \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$$

پس: معادله حالت (ج) رخ داده است که به آن هذلولی یک پیچه میگویند.

$$z=0 \Rightarrow 2x^2 - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow$$



در فضا



$$\frac{1}{25}x^2 + \frac{1}{16}y^2 + \frac{1}{36}z^2 = 1 \quad \cdot 2$$

$$x^2 - y^2 - 2z^2 = 0 \quad \cdot 3$$

$$6x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 6 = 0 \quad \cdot 4$$

$$x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z = 1 \quad \cdot 5$$

$$x^2 - y^2 + z^2 + 2xz + 2y - 1 = 0 \quad \cdot 6$$

$$4x^2 + 2y^2 + z^2 - 8x + 4y + 7 = 0 \quad \cdot 7$$

$$z^2 - 4x^2 = y \quad \cdot 8$$

$$2x^2 + y^2 + 3z^2 - 12z + 11 = 0 \quad \cdot 9$$

$$x^2 + 2y^2 - z^2 - 6x - 12y + 26 = 0 \quad \cdot 10$$

$$x^2 + z^2 - 2xz + 2x - 2z + 1 = 0 \quad \cdot 11$$

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x - 8y + 6z + 12 = 0 \quad \cdot 12$$

$$z = xy \quad \cdot 13$$

$$z^2 = xy \quad \cdot 14$$

$$x^2 = z - y \quad \cdot 15$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = 0 \quad \cdot 16$$

$$x^2 - 2y^2 - z^2 = 1 \quad \cdot 17$$

$$x^2 + 6xy + 9y^2 - 4 = 0 \quad \cdot 18$$