

قاعده زنجیره: فرض کنید $P(x, y)$ تابع دو متغیره مشتق پذیر باشد و $x = x(t)$ ، $y = y(t)$ نیز مشتق پذیر باشند. در این صورت

$$F(t) = P(x(t), y(t))$$

مشتق پذیر بوده داریم (توجه: یکسانی در ضرایب مشتق):

$$F'(t) = P_x(x(t), y(t)) x'(t) + P_y(x(t), y(t)) y'(t)$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dP}{dt} = P_x \cdot \frac{dx}{dt} + P_y \cdot \frac{dy}{dt}$$

مثال: اگر $y = \sin t$ ، $x = e^t$ ، $w = x^2 + xy$ را بیابید.

$$\frac{dw}{dt} = w_x \cdot \frac{dx}{dt} + w_y \cdot \frac{dy}{dt} = (2x + y)(e^t) + (x)(\cos t)$$

جواب داریم

$$= (2e^t + \sin t)e^t + e^t \cos t.$$

قاعده زنجیره: تابع دو متغیره $P(x, y)$ را به صورت $P(x(u, t), y(u, t))$ در نظر بگیرید. در این صورت

مشتق پذیر باشد و $x = x(u, t)$ ، $y = y(u, t)$ نیز تابع مشتق پذیر باشند. آنگاه برای

$$P(x(u, t), y(u, t))$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

داریم

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

(توجه: یکسانی در ضرایب مشتق)

مثال: $y = \frac{t}{u}$, $x = tu$, $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ را بر حسب $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial t}$

جواب: $f_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}$, $f_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}$, $x_t = u$, $x_u = t$,

$y_t = \frac{1}{u}$, $y_u = -\frac{t}{u^2}$

لذا داریم $\frac{\partial f}{\partial t} = f_t = f_x \cdot x_t + f_y \cdot y_t = \frac{2x}{x^2 + y^2} \times u + \frac{2y}{x^2 + y^2} \times \frac{1}{u}$

و می توانیم بجای x, y, t بر حسب u, t بنویسید و داریم

$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \times t + \frac{2y}{x^2 + y^2} \times \left(-\frac{t}{u^2}\right)$

مثال: $z = \sin t$, $y = \ln t$, $x = t^2$, $w = xyz$ را در رابطه با $\frac{dw}{dt}$

جواب: درشتیم $f(x, y)$ $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$

حل جزئیات به تفصیل هم به صورت زیر است

$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$

$= yz \times 2t + xz \times \frac{1}{t} + xy \times \cos t$

و می توانیم بجای x, y, z بر حسب t بنویسیم و داریم

حل با کمک قاعده زنجیره ای و مشتق گیری ضمنی زیر را ثابت کرد که آزاد می گذارم:

$$F(x, y) = 0 \Rightarrow y' = - \frac{F_x}{F_y} = - \frac{\text{مشتق } F \text{ نسبت به } x}{\text{مشتق } F \text{ نسبت به } y}$$

در اینجا در مشتق

(توضیح: شکل در اینجا مشتق را نشان می دهد)

به طور مثال: اگر $x^2 + y^2 = x + y + 1$ ، $y = y(x)$ ، آن گاه

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - x - y - 1 = 0$$

همه یار را به یک طرف می بریم

$$\Rightarrow y' = - \frac{2x - 1}{2y - 1}$$

حل این منوط بر آنست که $F(x, y, z) = 0$ ، $z = z(x, y)$ در این صورت

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F_x}{F_z} , \quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{F_y}{F_z}$$

مثال: فرض کنید $e^{-xy} - x^2z + e^z = 0$ ، $z = z(x, y)$ ، آن گاه z_x, z_y را بیابید.

جواب: $F(x, y, z) = e^{-xy} - x^2z + e^z = 0$. لذا

$$z_x = - \frac{F_x}{F_z} = - \frac{-ye^{-xy}}{-x^2 + e^z}$$

(همه یار را به یک طرف می بریم)

$$z_y = - \frac{F_y}{F_z} = - \frac{-xe^{-xy}}{-x^2 + e^z}$$

مثال: فرض کنید $u = u(x, y, z)$ که $x = x - y$ ، $y = y - z$ ، $z = z - x$ می‌باشد. نشان دهید $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

جواب: داریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial r} \cdot (1) + \frac{\partial u}{\partial s} \cdot (0) + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot (-1) = u_r - u_t$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial r} \cdot (-1) + \frac{\partial u}{\partial s} \cdot (1) + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot (0) = u_s - u_r$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial r} \cdot (0) + \frac{\partial u}{\partial s} \cdot (-1) + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot (1) = u_t - u_s$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = (u_r - u_t) + (u_s - u_r) + (u_t - u_s) = 0. \checkmark$$

فرض کنید $f(x, y, z)$ تابع سه متغیره باشد؛ گوییم f را یک بردار $\text{grad } f$ یا ∇f می‌نامیم؛ تعریف

می‌کنیم

$$\vec{\nabla} f = \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

$$= (f_x, f_y, f_z).$$

به طور خلاصه و مفید $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ هم‌شکل می‌دهند و لذا

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

وقت کنید $\vec{\nabla} f$ یک بردار است.

$$\vec{\nabla} \phi = (p_x, p_y, p_z) = (rx, ry, -rz)$$
$$\vec{\nabla} f = (f_x, f_y, f_z) = (y + ze^{xz}, x, xe^{xz}).$$
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

(B) $\langle t, \alpha \rangle$ واقع در S گذاردن از P باشد که C هموار باشد؛ یعنی

$x(t), y(t), z(t)$ به طور مستقل پذیرفته شود $\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t) = 1$ ✓

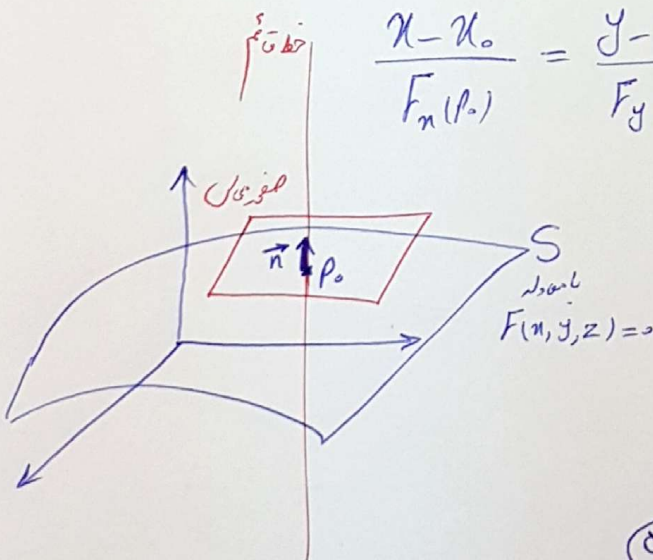
$$\vec{n} = (F_n(p_0), F_y(p_0), F_z(p_0))$$

مزار نعل صفی علی بن ابراهیم و مزار صفی علی بن محمد عیسیٰ است:

$$F_x(p_0)(x-x_0) + F_y(p_0)(y-y_0) + F_z(p_0)(z-z_0) = 0.$$

در ضمن معادله خطای نام در سطح 5 در نقطه ۲ نیز عبارت از:

$$\frac{x - x_0}{F_x(p_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(p_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(p_0)}$$



مثال: صفحه‌ای که در نقطه $(0,0,-1)$ از نقطه $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ می‌گذرد.

جواب: همواره در این سطح داریم $F(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 - 1 = 0$

در نقطه $P_0 = (0,0,-1)$ داریم $F_x = 2x$, $F_y = \frac{2y}{4}$, $F_z = 2z$

$$\vec{n} = (F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0)) = (0, 0, -2)$$

بنابراین معادله صفحه‌ای که از

$$0(x-0) + 0(y-0) - 2(z-(-1)) = 0 \Rightarrow -2(z+1) = 0 \Rightarrow \boxed{z+1=0}$$

و معادله خط قائم به سطح $z = -1$ در این حالت می‌توان نوشت (عبارت از

$$x = 0t + 0, \quad y = 0t + 0, \quad z = -2t - (-1) \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=-2t+1 \end{cases}$$

اگر معادله سطح S به صورت $z = f(x,y)$ بدو باشد، گاه می‌توانیم $F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$ بنویسیم

$$\vec{n} = (F_x, F_y, F_z) = (f_x, f_y, -1)$$

مثال: صفحه‌ای که در نقطه $(2,-2,-4)$ از سطح $z = xy$ می‌گذرد.

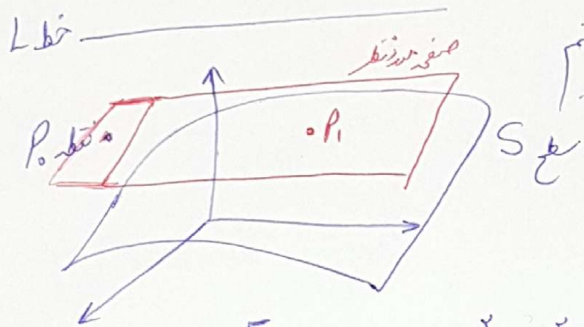
جواب: $z = f(x,y) = xy \Rightarrow \vec{n} = (f_x, f_y, -1) = (y, x, -1)$

لذا با فرض $P_0 = (2,-2,-4)$ به دست می‌آید $\vec{n} = (-2, 2, -1)$

معادله صفحه‌ای که از P_0 می‌گذرد $-2(x-2) + 2(y+2) - (z+4) = 0 \Rightarrow \boxed{2x - 2y + z = 4}$

معادله خط قائم به سطح $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+4}{-1}$

مثال: صفحه گذرا از نقطه (۱، ۰، ۰) و عمود بر سطح $x^2 - y^2 + 2z = 0$ و مواز خط $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$ بیابید.



جواب: شکل تقریبی جهت درک مسئله رسم می کنیم

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) \quad \text{اگر}$$

$$F(x, y, z) = x^2 - y^2 + 2z = 0$$

برابر فرمول صفحه گذرا از

$$\vec{n} = (F_x, F_y, F_z) = (2x, -2y, 2) \Big|_{P_1} = (2x_1, -2y_1, 2)$$

$$\vec{m} = (2, 1, -2) \quad \text{برابر خط}$$

چون صفحه مد نظر خط L مواز هستند؛ لذا $\vec{m} \perp \vec{n}$. بنابراین $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$ پس

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = 4x_1 - 2y_1 - 2 = 0$$

از طرفی نقطه P_1 در سطح S قرار دارد. پس در معادله سطح صدق می کند. یعنی

$$x_1^2 - y_1^2 + 2z_1 = 0$$

حال با داشتن $\vec{n}$ و P_1 معادله مد نظر را می نویسیم.

$$2x_1(x - x_1) - 2y_1(y - y_1) + 2(z - z_1) = 0$$

طبق فرض این صفحه از نقطه (۱، ۰، ۰) می گذرد. پس مختصات نقطه در معادله صدق می کند. یعنی

$$-2x_1 + 2y_1 + 2(1 - z_1) = 0$$

حال با حل دستگاه سه معادله سه مجهول به دست آمده (داخل کادر قرمز) ، x_1, y_1, z_1 و در نتیجه معادله صفحه می به دست می آید.
(جواب به صورت بیان)

مثال: نشان دهید که مجموع قطع‌ها (مقطع نقطه اشتراک با محور مختصات) هر مخروطی بی مربع
(۹۶۰) $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ می‌باشد.

جواب: نقطه مختاره (x_0, y_0, z_0) را در سطح مذکور در نظر می‌گیریم. لذا داریم $\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = \sqrt{a}$
و معادله سطح بی‌شمار بر روی در نقطه P_0 را می‌نویسیم.

$$F(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{a} = 0$$

مشتق $\vec{n} = (F_x, F_y, F_z) \Big|_{P_0} = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt{y}}, \frac{1}{\sqrt{z}} \right) \Big|_{P_0} = \left(\frac{1}{\sqrt{x_0}}, \frac{1}{\sqrt{y_0}}, \frac{1}{\sqrt{z_0}} \right)$

معادله سطح بی‌شمار $\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0 \Rightarrow$

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}} - \sqrt{x_0} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} - \sqrt{y_0} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} - \sqrt{z_0} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} \stackrel{12}{=} \sqrt{a} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{a}$$

نقطه برخورد با محور x $y=z=0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x_0}} = \sqrt{a} \Rightarrow x = \sqrt{a} \sqrt{x_0}$

نقطه برخورد با محور y $x=z=0 \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{y_0}} = \sqrt{a} \Rightarrow y = \sqrt{a} \sqrt{y_0}$

نقطه برخورد با محور z $x=y=0 \Rightarrow \frac{z}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{a} \Rightarrow z = \sqrt{a} \sqrt{z_0}$

مجموع قطع $\Rightarrow x + y + z = \sqrt{a} \sqrt{x_0} + \sqrt{a} \sqrt{y_0} + \sqrt{a} \sqrt{z_0}$

$$= \sqrt{a} (\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a. \checkmark$$

یا دآوردن می کنیم و در تابع سه متغیره $f(x, y, z)$ ، گرادیان $\vec{\nabla} f$ را برابر از زیر تعریف می کنیم

$$\vec{\nabla} f = \text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

و تقسیم $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ بعنوان یک عملگر نمایش می دهیم

حال کاربرد و مفهوم بردار گرادیان را ذکر می کنیم.

- مشتق جهتی:

فرض کنید تابع سه متغیره $f(x, y, z)$ در یک نقطه $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ تعریف شده باشد و L جهت دارد از P_0 با بردار $\vec{u} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ باشد. مشتق جهتی f در P_0 در جهت L یا به صورت زیر تعریف می شود.

$$D_{\vec{u}} f(P_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

اگر جهت به صورت بردار $\vec{u}$ در جهت P_0 در جهت L مشتق جهتی دارد.

نکته: فرض کنید L محور x باشد و $\vec{u} = \vec{i} = (1, 0, 0)$ در این صورت

$$D_{\vec{u}} f(P_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} = f_x(P_0)$$

به طور مشابه ثابت می شود اگر $\vec{u} = \vec{j}$ ، $D_{\vec{u}} f(P_0) = f_y(P_0)$

و اگر $\vec{u} = \vec{k}$ ، $D_{\vec{u}} f(P_0) = f_z(P_0)$

یعنی مشتق جهتی در حالت خاص، همان مشتق جزئی است یا به عبارت دیگر مشتق جهتی تقمیم مفهوم مشتق جزئی است.

نکته: اگر $P(x, y, z)$ در نقطه $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ مشتق پذیر باشد و $\vec{u} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ به آن گاه

$$D_u P(P_0) = P_x(P_0) \cos \alpha + P_y(P_0) \cos \beta + P_z(P_0) \cos \gamma$$

$$= (P_x(P_0), P_y(P_0), P_z(P_0)) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$= \vec{\nabla} P(P_0) \cdot \vec{u} \quad \text{فرمول داخلی}$$

لذا داریم

پس کافیت برای پیدا کردن مشتق جهت یک تابع مشتق پذیر یا تفریب از فرمول بالا استفاده کنیم.

نکته: برای پیدا کردن مشتق جهت یک تابع در جهت بردار $\vec{a}$ ، قرار دهیم $\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
توجه: $\vec{u}$ حتماً باید برداری یکد باشد.

مثال: مشتق جهت تابع $P(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ در نقطه $P_0 = (1, 2, 3)$ در جهت بردار $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ باشد.

حساب:

$$|\vec{a}| = \sqrt{4+1+4} = 3, \quad \vec{\nabla} P = (2x, 2y, -2z)$$

$$\vec{u} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \quad \vec{\nabla} P(P_0) = (2, 4, -6)$$

$$\Rightarrow D_u P(P_0) = \vec{\nabla} P(P_0) \cdot \vec{u} = (2, 4, -6) \cdot \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \\ = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{12}{3} = 4.$$

$$D_u P(P_0) = \vec{\nabla} P(P_0) \cdot \vec{u} \quad \text{و لذا}$$

داشتیم

$$D_u P(P_0) = |\vec{\nabla} P(P_0)| |\vec{u}| \cos \theta = |\vec{\nabla} P(P_0)| \cos \theta$$

لذا بیشترین مقدار $D_u P(P_0)$ می‌شود $|\vec{\nabla} P(P_0)|$ زمانی که $\theta = 0$ یعنی $\vec{u}$ بردار گرادیان هم جهت باشند.

و کمترین مقدار $(D_u f(p_0))$ است و زمانی رخ می دهد که $\theta = \pi$ یعنی $\vec{u}$ و بردار گرادیان در جهت مخالف باشند.

مثال: بیشترین مقدار مشتق جهت تابع $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ در نقطه $p_0 = (1, 2, 3)$ را بیابید.

$$\vec{\nabla} f = (2x, 2y, -2z) \Rightarrow \vec{\nabla} f(p_0) = (2, 4, -6) \Rightarrow |\vec{\nabla} f(p_0)| = \sqrt{56}$$

لذا بیشترین مقدار مشتق جهت $\sqrt{56}$ در جهت $\vec{\nabla} f(p_0)$ و کمترین مقدار آن $-\sqrt{56}$ در جهت $-\vec{\nabla} f(p_0)$ است.
(توجه: یکمیل در فیل جهت افقی)

در حالتی که $f(x, y)$ دو متغیره باشد نیز داریم

$$\vec{\nabla} f := (f_x, f_y), \quad D_u f(p_0) = \vec{\nabla} f(p_0) \cdot \vec{u}$$

مثال: مشتق جهت $f(x, y) = xy^3 + x^2y^2 - 2y$ در نقطه $p_0 = (2, 1)$ و در جهت از p_0 تا $p_1 = (4, 0)$ را بیابید.

$$\vec{a} = \vec{p_1 p_0} = (2, -1) \Rightarrow \vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\vec{\nabla} f = (y^3 + 2xy^2, 2xy^2 + 2x^2y - 2) \Rightarrow \vec{\nabla} f(p_0) = (5, 12)$$

$$\Rightarrow D_u f(p_0) = \vec{\nabla} f(p_0) \cdot \vec{u} = \frac{10}{\sqrt{5}} - \frac{12}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

مسائل

dw/dt را با قاعده زنجیره‌ای در صورتی بیابید که

$$w = x^2 - xy + y^2, x = t^3, y = t^4 \quad . 1$$

$$w = x^3 - xy^2, x = e^{-t}, y = \cos t \quad . 2$$

$$w = y/x, x = \ln t, y = \tan t \quad . 3$$

$$w = e^{xy} \ln(x + y), x = t^2, y = 2 - t^2 \quad . 4$$

$$w = \sqrt{r + s}, r = \cos t, s = \sin t \quad . 5$$

$$w = u/(u - v), u = \cosh t, v = \sinh t \quad . 6$$

$$w = \sin(x + y - z), x = \sin t, y = e^{t^2}, z = \ln t \quad . 7$$

$$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, x = 1, y = t, z = t^2 \quad . ۸$$

$$w = xy + xz + yz, x = e^t, y = e^{-t}, z = \ln t \quad . ۹$$

$$w = \ln pqrs, p = \sin t, q = \cos t, r = e^t, s = e^{-t} \quad . ۱۰$$

در هر حالت، جواب را با بیان صریح w به صورت تابعی از t پیش از مشتگیری امتحان نمایید.

با استفاده از قاعده زنجیره‌ای، $\partial w / \partial t$ و $\partial w / \partial u$ را در صورتی بیابید که

$$w = 1 - x^2 - y^2, x = t \cos u, y = t \sin u \quad . ۱۱$$

$$w = x/y, x = e^t \cos u, y = e^t \sin u \quad . ۱۲$$

$$w = e^{x/y}, x = tu, y = 1/tu \quad . ۱۳$$

$$w = \tan xy, x = t^2 + u^2, y = t^2 - u^2 \quad . ۱۴$$

$$w = \arctan (x/y), x = t^2 - u^2, y = 2tu \quad . ۱۵$$

$$w = x/(x + y), x = t \cosh u, y = t \sinh u \quad . ۱۶$$

$$w = xyz, x = t + u, y = t - u, z = t^2 + u^2 \quad . ۱۷$$

$$w = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, x = t + u, y = t - u, z = 2\sqrt{tu} \quad . ۱۸$$

در هر حالت، جواب را با بیان صریح w به صورت تابعی از t و u پیش از مشتگیری امتحان کنید.

با استفاده از قاعده زنجیره‌ای، $\partial u / \partial x$ ، $\partial u / \partial y$ ، و $\partial u / \partial z$ را در صورتی بیابید که

$$u = \sin rs, r = x^2 + yz, s = x^2 - yz \quad . ۱۹$$

$$u = \tanh^{-1} (r/s), r = x \sin yz, s = x \cos yz \quad . ۲۰$$

$$u = r^2 + s^2 + t^2, r = x + y + z, s = x - y + z, t = x - y - z \quad . ۲۱$$

$$u = \ln (r + s + t), r = xy, s = xz, t = yz \quad . ۲۲$$

در هر حالت، جواب را با بیان صریح u به صورت تابعی از x ، y ، و z پیش از مشتگیری امتحان کنید.

۲۳. فرض کنید $u = u(r, s, t)$ ، که در آن $r = x - y$ ، $s = y - z$ ، $t = z - x$ و u یک تابع مشتق پذیر باشد. نشان دهید که

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

۲۴. فرض کنید $u = xf(x + y) + yg(x + y)$ ، که در آن f و g توابع دلخواهی از یک متغیر با مشتقات دوم f'' و g'' اند. نشان دهید که

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

معادلات صفحه مماس و خط قائم نمودار معادله داده شده را در نقطه ذکر شده P بنویسید.

۱. $y^2 = 4x, P = (1, 2, 6)$

۲. $z = 2x^2 + y^2, P = (1, -1, 3)$

۳. $z = 2x^2 - 3y^2, P = (-2, 1, 5)$

۴. $x^2 + y^2 - z^2 = -1, P = (2, -2, 3)$

۵. $x^2 - 3xy + y^2 + xz - z^2 = 3, P = (1, -1, -1)$

۶. $x^3 + y^3 + z^3 = 1, P = (-2, 1, 2)$

۷. $xyz = a^3, P = (x_0, y_0, z_0)$

۸. $z^2 = xy, P = (x_0, y_0, z_0)$

۹. $z = \ln(x^2 + y^2), P = (e, 0, 2)$

۱۰. $Ax + By + Cz + D = 0, P = (x_0, y_0, z_0)$

۱۱. $2^{x/z} + 2^{y/z} = 16, P = (3, 3, 1)$

۱۲. $z = 2 \sin x \cos y, P = (\pi/4, \pi/4, 1)$

۱۳. در چه نقطه از مخروط $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ صفحه مماس و خط قائم تعریف نشده اند؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

۱۴. معادلات صفحه مماس و خط قائم به سطح درجه دو $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ را در نقطه $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ نوشته، و نشان دهید این معادلات نتایج مثال ۱ را در بر دارند.

۱۵. بیضی گون $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 66$ دو صفحه مماس موازی صفحه $x + y + z = 1$ دارد. این صفحات و نقاط تماس آنها را بیابید.

۱۶. نشان دهید که مجموع قطعهای (مختصات نقاط اشتراک با محورهای مختصات) هر صفحه مماس بر سطح $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ ($a > 0$) مساوی a است.

۱۷. نشان دهید مجموع مربعات قطعهای هر صفحه مماس بر سطح $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ مساوی a^2 است.

۱۸. نشان دهید هر چهاروجهی محدود به صفحات مختصات و یک صفحه مماس بر سطح $xyz = a^3$ ($a > 0$) حجم ثابت $\frac{3}{2}a^3$ را دارد.

۱۹. نشان دهید که کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ و استوانه $xy = 1$ با هم مماسند؛ یعنی، در نقطه $(1, 1, 0)$ صفحه مماس یکسانی دارند. این صفحه مماس مشترک

مسائل

گرادیان ∇f تابع f دو یا سه متغیره داده شده را یافته و، با استفاده از ∇f ، مشتق جهتی f را در نقطه داده شده P و در جهت بردار ذکر شده $\mathbf{a}$ حساب کنید.

۱. $f(x, y) = 4x - 3y$, $P = (2, 1)$, $\mathbf{a} = 12\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

۲. $f(x, y) = x^3 - 2xy + y^2 + 8$, $P = (-1, 4)$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

۳. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$, $P = (25, 7)$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

۴. $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $P = (6, 6)$, $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

۵. $f(x, y) = \sin(x + y)$, $P = (2, -2)$, $\mathbf{a} = 20\mathbf{i} - 21\mathbf{j}$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2), P = (1, 3), \mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} \quad \cdot ۶$$

$$f(x, y) = e^{x^2 y}, P = (-1, 0), \mathbf{a} = 8\mathbf{i} + 15\mathbf{j} \quad \cdot ۷$$

$$f(x, y) = \arctan(x/y), P = (3, 4), \mathbf{a} = -6\mathbf{i} - 8\mathbf{j} \quad \cdot ۸$$

$$f(x, y, z) = xyz, P = (1, 2, -3), \mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \quad \cdot ۹$$

$$f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2, P = (-1, 3, 1), \mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k} \quad \cdot ۱۰$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, P = (9, -6, 2), \mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \quad \cdot ۱۱$$

$$f(x, y, z) = (x + y)/z, P = (6, -3, 3), \mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k} \quad \cdot ۱۲$$

$$f(x, y, z) = z/xy, P = (-1, 1, 2), \mathbf{a} = -10\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 5\mathbf{k} \quad \cdot ۱۳$$

$$f(x, y, z) = e^{x-y+2z}, P = (1, -3, -2), \mathbf{a} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k} \quad \cdot ۱۴$$

$$f(x, y, z) = \cos(x - y + z), P = (2, 1, -1), \mathbf{a} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \quad \cdot ۱۵$$

$$f(x, y, z) = \sinh xyz, P = (0, 2, 4), \mathbf{a} = 12\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 16\mathbf{k} \quad \cdot ۱۶$$

۱۷. فرض کنید $f(x, y) = x^4 + 2xy + y^3$. مشتق جهتی f را در نقطه $(1, 2)$ و در جهت شمال غربی که با محور x مثبت زاویه 135° می سازد بیابید .

۱۸. مشتق جهتی $f(x, y) = \ln(e^x + e^y)$ در مبدأ و در جهت شمال شرقی و منصف ربع اول را بیابید .

۱۹. مشتق جهتی $f(x, y) = (x + y)^2$ را در نقطه $P_0 = (3, 2)$ و در جهت از P_0 تا $(6, 5)$ بیابید .

۲۰. فرض کنید $f(x, y) = x^2 y^2 - xy^3 + 2y + 1$. مشتق جهتی f را در نقطه $P_0 = (-2, 1)$ و در جهت از P_0 به مبدأ بیابید .

۲۱. فرض کنید $f(x, y, z) = \ln(x + y + z)$. مشتق جهتی f را در نقطه $(2, 3, -4)$ و در جهت که با محورهای مثبت مختصات زوایای حاده مساوی می سازد بیابید .

۲۲. فرض کنید $f(x, y, z) = xy^2 - xyz + z^3$. مشتق جهتی f را در نقطه $(1, 2, 1)$ و در جهت با زوایای هادی 60° ، 45° ، و 60° بیابید .

۲۳. به فرض آنکه $f(x, y) = xy$ ، بردار یکه $\mathbf{u}$ را طوری بیابید که $D_{\mathbf{u}} f(3, 4) = 0$.