

## فرائب لگاتر:

فرض کنید بخواهیم اگر هم تابعی را تحت یک شرط بدست آوریم. مثلاً بیشترین حجم ممکن را که با هموار مسطحی

$10 \times 20$  می توان ساخت. جنبه بنیال بیشترین یعنی اگر هم هستیم، اما شرط داریم و آن محدودیت هموار بر سطح ملک است. چنین اگر هم می را اگر هم هر شرط یا مقید گویند.

برای بدست آوردن اگر هم هر شرط بسته به نوع سوال از روش هر مختلفی می توان اقدام کرد اما یکی از بهترین روش ها در بدست اگر هم هر شرط تکنیکی نیم فرائب لگاتر است که به طور مفصل در فصل زیر ذکر می شود.

## فصل فرائب لگاتر:

- برای تابع دو متغیره: فرض کنید منحنی  $C$  نمودار معادله  $g(x, y) = 0$  را بنویسید.  $X, Y$  باشد و نیز فرض کنید  $f(x, y)$  و  $g(x, y)$  بر مجموعه باز شامل  $C$  مشتق جزئی اول پیوسته داشته باشند. همچنین فرض کنید  $C$ ،  $\nabla g(x, y) \neq 0$ . اگر  $P(a, b)$  در نقطه  $C$  از  $C$  اگر هم شرط داشته باشد؛ آن گاه عدد ثابت  $\lambda$  وجود دارد که

$$\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b).$$

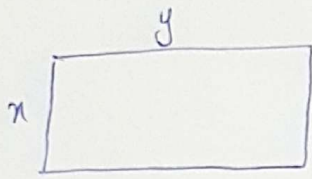
$\lambda$  را ضریب لگاتر گویند.

- برای تابع سه متغیره: فرض کنید رویه  $S$  سطح معادله  $g(x, y, z) = 0$  در فضای سه بعدی باشد و  $f(x, y, z)$  و  $g(x, y, z)$  بر مجموعه باز شامل  $S$  دارای مشتق جزئی اول پیوسته باشند. اگر  $\nabla g(x, y, z) \neq 0$  و

$P(a, b, c)$  در  $S$  از  $S$  اگر هم شرط داشته باشد؛ آن گاه عدد ثابت  $\lambda$  وجود دارد که

$$\nabla f(a, b, c) = \lambda \nabla g(a, b, c).$$

مثال ۱: منبرچه مستطیل، بیشترین مساحت را باید بداند که بتوان دور آن را با ۸۰۰ متر چهارگانه کرد.  
چرا: شکل تیرتی به درک و حل مسئله می‌کند.



حکم را با یک تابع مختلفه می‌نویسیم. اینجا حکم پیدا کردن بیشترین مساحت را به دست آوردن بیشترین طول در عرض می‌نویسیم.  
 $P(x, y) = xy$

حل شرط مساله را با تابع دوم مشخص می‌کنیم. شرط ۸۰۰ متر چهارگانه دور زمین است. یعنی

$$2(x+y) = 800$$

$$\Rightarrow g(x, y) = 2x + 2y - 800 = 0$$

حل به به قضیه فرانسوا گالواردارم:  $\lambda$  هر عدد دارد  
 $\nabla P = \lambda \nabla g$

$$\begin{aligned} \nabla P &= (P_x, P_y) = (y, x) \\ \nabla g &= (g_x, g_y) = (2, 2) \end{aligned} \Rightarrow (y, x) = \lambda (2, 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2\lambda \\ x = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow x = y$$

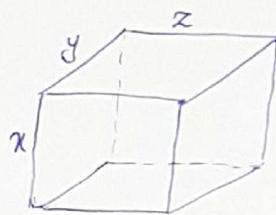
حال با قرار دادن در شرط  $g(x, y) = 0$  داریم  $4x = 800$  و لذا  $x = 200$  و در نتیجه  $y = 200$ .

وقت کنید  $\lambda$  در حل مسئله یک متغیر دیگر پیدا می‌شود که ممکن است در برخی موارد مقدار عددی مشخص لازم نباشد.

$$\begin{aligned} g(x, y) = 0 &\Rightarrow x + y = 400 \\ x, y &\geq 0 \quad (\text{توضیح در ضلع مثبتی، تقریبی}) \\ x, y &\leq 400 \end{aligned} \Rightarrow \begin{matrix} (0, 400) \\ (400, 0) \end{matrix} \quad (200, 200)$$

$$\begin{aligned} P(200, 200) &= 40,000 \text{ max} \\ P(0, 400) &= 0 \\ P(400, 0) &= 0 \end{aligned}$$

مثال ۲: کمترین مقدار ممکن از  $P$  چیست؟  $P$  مجموع یک جعبه مکعب مستطیل بسته به حجم ۱۰۰۰ سانتی متر مکعب را یابید.



جواب:

حلیم: کمترین مقدار ممکن  $\Rightarrow P(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$   
 ح. جانبی مکعب مستطیل =

شرط: حجم ۱۰۰۰ سانتی متر مکعب  $\Rightarrow g(x, y, z) = xyz - 1000 = 0$

حل بنابر قضیه فرایب لگرانژ داریم:

$\exists \lambda; \nabla P = \lambda \nabla g$   
 $\nabla P = (2y + 2z, 2x + 2z, 2x + 2y)$   
 $\nabla g = (yz, xz, xy)$   
 $(2y + 2z, 2x + 2z, 2x + 2y) = \lambda (yz, xz, xy)$

$\Rightarrow \begin{cases} 2y + 2z = \lambda yz & \div 2yz \\ 2x + 2z = \lambda xz & \div 2xz \\ 2x + 2y = \lambda xy & \div 2xy \end{cases}$   
 چون  $x, y, z$  طول هستند لذا  $x > 0, y > 0, z > 0$   
 $\frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{\lambda}{2}$   
 $\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{\lambda}{2}$   
 $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{\lambda}{2}$   
 (تقریبی) (تکثیر در این معادلات)

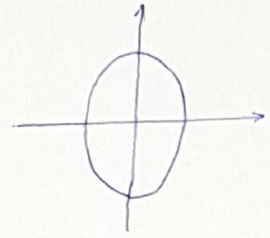
$\Rightarrow x = y = z \xrightarrow{\text{تأیید در شرط مسئله}} xyz = 1000 \Rightarrow x^3 = 1000 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow y = z = 10$   
 $(10, 10, 10)$

$g(x, y, z) = 0 \Rightarrow xyz = 1000$   
 $x, y, z \geq 0$

$P(10, 10, 10) = 200 + 200 + 200 = 600$

مثال ٢: اكرسم/تابع  $f(x,y) = x^2y$  ، امربغى  $2x^2 + y^2 = 3$  بالميد

جواب:



حکم: اكرسم/تابع  $f(x,y) = x^2y$

شرط: بغى  $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 3 = 0$

بجانبه قضيه فریب لگرانژ  $\left. \begin{aligned} \exists \lambda; \vec{\nabla} f &= \lambda \vec{\nabla} g \\ \vec{\nabla} f &= (2xy, x^2), \vec{\nabla} g = (4x, 2y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (2xy, x^2) = \lambda(4x, 2y)$

$\Rightarrow \begin{cases} 2xy = 4\lambda x \Rightarrow x=0 \text{ ل } y=2\lambda \\ x^2 = 2\lambda y \quad (*) \end{cases}$

اگر  $x=0 \xrightarrow{g(x,y)=0} y^2=3 \Rightarrow y=\pm\sqrt{3}$

اگر  $y=2\lambda \xrightarrow{(*)} x^2=y^2 \xrightarrow{g(x,y)=0} 3x^2=3 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1, y^2=x^2=1$

لذا نکتات  $(-1, \pm 1)$  ,  $(1, \pm 1)$  ,  $(0, \pm\sqrt{3})$

$f(0, \sqrt{3}) = 0$

$f(0, -\sqrt{3}) = 0$  حقیقی min

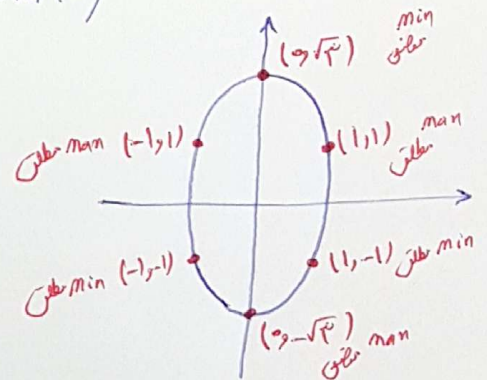
$f(1, 1) = 1$  حقیقی Max ✓

$f(1, -1) = -1$  حقیقی Min ✓

$f(-1, 1) = -1$  حقیقی min ✓

$f(-1, -1) = 1$  حقیقی Max ✓

(توضیح درج ذیل است)  $\begin{cases} y > 0, x \neq 0, f(x,y) > 0 \\ y < 0, x \neq 0, f(x,y) < 0 \end{cases}$



مثال ۴: نقطه از سطح گویان بیضی  $z = \frac{x^2 + y^2}{4} - 2$  را بیابید که از همه به نقطه  $(0, 0, 1)$  نزدیکتر باشد.

حکم: نزدیکترین نقطه  $(0, 0, 1)$

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2}$$

$$\hookrightarrow f(x, y, z) = x^2 + (y-1)^2 + z^2$$

نقطه  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z - 1 = 0$

قید تناسب  $\nabla f = \lambda \nabla g, \exists \lambda$

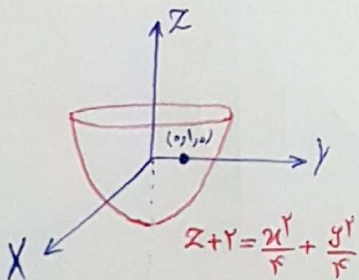
$$\left. \begin{array}{l} \nabla f = (2x, 2(y-1), 2z) \\ \nabla g = (2x, 2y, -4) \end{array} \right\} \Rightarrow (2x, 2(y-1), 2z) = \lambda (2x, 2y, -4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda x \Rightarrow x = 0 \wedge \lambda = 1 \\ 2y - 2 = 2\lambda y \xrightarrow{\lambda=1} -2 = 0 \neq \Rightarrow \boxed{x=0} \\ 2z = -4\lambda \Rightarrow y \neq 0 \Rightarrow 2y - 2 = 2(-\frac{z}{2})y \Rightarrow 2y - 2 = -zy \\ \hookrightarrow \lambda = -\frac{z}{2} \end{cases} \xrightarrow{y \neq 0} \boxed{z = \frac{2-2y}{y}}$$

$$\left. \begin{array}{l} g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z - 1 = 0 \\ x = 0 \\ z = \frac{2}{y} - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow y^2 - \frac{1}{y} + 1 - 1 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{y} \Rightarrow y^3 = 1 \Rightarrow \boxed{y=1}$$

$$\boxed{z = -1}$$

لذا نقطه  $(0, 1, -1)$  از همه به  $(0, 0, 1)$  نزدیکتر است.  
مثلاً  $P$  بر سطح گویان بیضی دارد و از همه نزدیکتر است.



مثال ۵: متاهی از بیضی  $4x^2 + y^2 = 4$  را با بیضی که از هم به خط  $4x - 2y + 4 = 0$  نزدیکتر باشد.

حکم: نقطه نقطه از خط

$$f(x, y) = \frac{|4x - 2y + 4|}{\sqrt{4 + 4}} \rightarrow f(x, y) = 4x - 2y + 4$$

می دانیم و نزدیک به خط  $(x_1, y_1)$

$$ax + by + c = 0 \quad \text{از خط}$$

$$C = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

تغییر ضرایب  $\rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} \exists \lambda; \quad \vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g \\ \vec{\nabla} f = (4, -2) \\ \vec{\nabla} g = (8x, 2y) \end{array} \right\} \Rightarrow (4, -2) = \lambda (8x, 2y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 = \lambda 8x \Rightarrow x = \frac{1}{2\lambda} \\ -2 = \lambda 2y \Rightarrow y = -\frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

$$g(x, y) = 0 \Rightarrow 4x \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 - 4 = 0$$

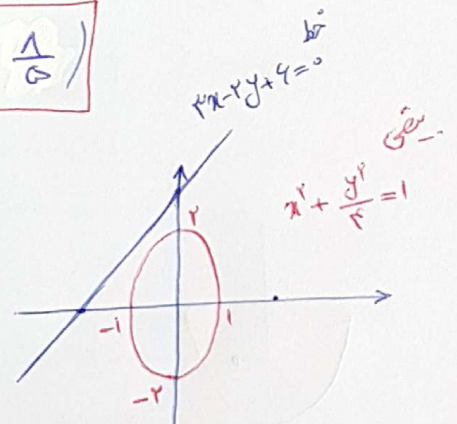
$$\Rightarrow \frac{4}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} - 4 = 0 \Rightarrow \frac{100}{4\lambda^2} = 4$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = \frac{100}{4 \times 4} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{100}}{4} = \pm \frac{10}{4} = \pm \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{5}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right) \\ \lambda = -\frac{5}{2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) \end{cases}$$

$$f\left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right) = \dots$$

$$f\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) = \dots$$



مثال ۹: مقدار از صافی  $(y-1)^2 = 4x$  را بیابید که از همه به نقطه  $(2, 0)$  نزدیکتر باشد.

حل: نقطه دایره

$$P(x, y) = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \rightarrow P(x, y) = (x-2)^2 + y^2$$

شرط: نقطه دایره

$$g(x, y) = (y-1)^2 - 4x = 0$$

تفاضل جزئی

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} P &= \lambda \vec{\nabla} g, \exists \lambda \\ \vec{\nabla} P &= (2(x-2), 2y) \\ \vec{\nabla} g &= (-4, 2(y-1)) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (2(x-2), 2y) = \lambda (-4, 2(y-1))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 4 = -4\lambda \Rightarrow 2\lambda = 2 - x \\ 2y = 2\lambda(y-1) \end{cases}$$

$$\rightarrow 2y = (2-x)(y-1) = 2y - 2 - x(y-1)$$

$$\Rightarrow x(y-1) = -2$$

$$\begin{aligned} g(x, y) &= 0 \\ x &= 0 \Rightarrow y = 1 \\ &\Rightarrow (0, 1) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{x \neq 0} y-1 = -\frac{2}{x}$$

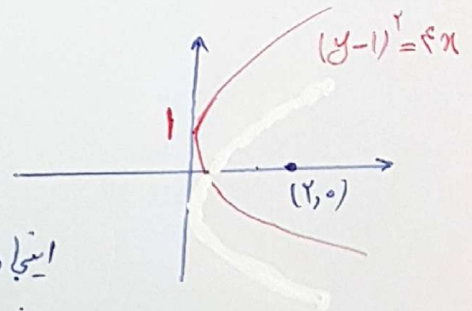
$$g(x, y) = 0 \xrightarrow{\frac{4}{x^2} - 4x = 0} \frac{4}{x^2} = 4x \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -1$$

$$(1, -1)$$

$$P(0, 1) = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$P(1, -1) = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \text{ min}$$

اینجا دورترین نقطه  
معنی ندارد.



مثال ۷: نقاط از جنس را برای  $x^2 - y^2 = 1$  بیابید که از هم دورترین نقطه  $(0, 4)$  از مبدأ باشند.

حل: کمترین فاصله را در نقطه

$$f(x, y) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} \Rightarrow f(x, y) = x^2 + (y-4)^2$$

شرط: نقطه در جنس را

$$g(x, y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$$

قید فرایب را

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} f &= \lambda \vec{\nabla} g, \quad \partial \lambda \\ \vec{\nabla} f &= (2x, 2(y-4)) \\ \vec{\nabla} g &= (2x, -2y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (2x, 2(y-4)) = \lambda (2x, -2y)$$

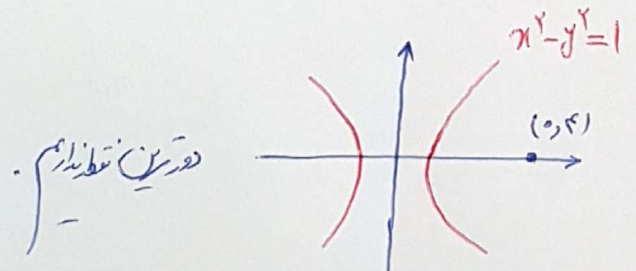
$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = \lambda 2x \Rightarrow x=0 \text{ یا } \lambda=1 \\ 2y-8 = -2\lambda y \quad (*) \end{cases}$$

یا  $x=0 \xrightarrow{g(x,y)=0} -y^2=1 \quad \#$

یا  $\lambda=1 \xrightarrow{(*)} 2y-8=-2y \Rightarrow 4y=8 \Rightarrow y=2 \xrightarrow{g(x,y)=0} x^2=5 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$

$$\Rightarrow (-\sqrt{5}, 2) \\ (\sqrt{5}, 2)$$

$$f(-\sqrt{5}, 2) = f(\sqrt{5}, 2) = \sqrt{5+4} = 3$$



مثال 1: نقطه از سری  $y = \frac{x^2}{4}$  را بیابید که از خط  $x - y - 4 = 0$  نزدیکترین باشد

جواب:

حکم: نزدیکترین نقطه از خط

$$f(x, y) = \frac{|x - y - 4|}{\sqrt{2}} \Rightarrow f(x, y) = x - y - 4$$

شرط: نقطه از سری

$$g(x, y) = y - \frac{x^2}{4} = 0$$

تقریباً

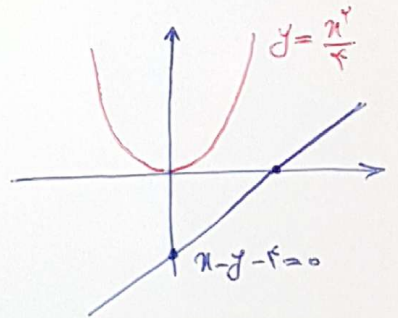
$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} f &= \lambda \vec{\nabla} g \\ \vec{\nabla} f &= (1, -1) \\ \vec{\nabla} g &= (-\frac{x}{2}, 1) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow (1, -1) = \lambda (-\frac{x}{2}, 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{\lambda x}{2} = 1 \\ -1 = \lambda \end{cases} \rightarrow \boxed{x=2} \xrightarrow{g(x,y)=0} y=1$$

$$\boxed{(2, 1)} \checkmark$$

دورترین نقطه



مثال 9: با استفاده از ضربگر لاجرانژ، اکسترممهای تابع  $f(x, y, z) = xy + xz$  تحت شرط داده را بیابید.

1)  $f(x, y, z) = xy + xz$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$  \*

$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g, \exists \lambda \\ \vec{\nabla} f = (y+z, x, z) \\ \vec{\nabla} g = (2x, 2y, 2z) \end{array} \right\} \Rightarrow (y+z, x, z) = \lambda(2x, 2y, 2z)$

$\Rightarrow \begin{cases} y+z = 2\lambda x & (1) \\ x = 2\lambda y & (2) \\ z = 2\lambda z \Rightarrow z=0 \text{ و } \lambda = \frac{1}{4} \end{cases}$

اگر  $z=0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4 = 0$  \*\*

$\begin{cases} (1) y = 2\lambda x \\ (2) x = 2\lambda y \end{cases} \Rightarrow y = 4\lambda^2 y \Rightarrow y=0 \text{ و } \lambda^2 = \frac{1}{4}$

اگر  $y=0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2, 0, 0 \\ 2, 0, 0 \end{pmatrix}$

اگر  $\lambda^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{2} y$

\*\*  $2y^2 + 2y^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

نقطه‌های است:  $(1, \sqrt{2}, 0), (1, -\sqrt{2}, 0), (-1, \sqrt{2}, 0), (-1, -\sqrt{2}, 0)$

اگر  $\lambda = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} (1) y+z = \frac{x}{2} \\ (2) x = y \end{cases} \Rightarrow y+z = \frac{y}{2} \Rightarrow -\frac{y}{2} = z \xrightarrow{g(x,y,z)=0}$

(10)  $y^2 + 2y^2 + \frac{y^2}{4} = 4 \Rightarrow 2y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$y = \pm \sqrt{\frac{\Lambda}{V}} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{\Lambda}{V}}, z = -\frac{y}{x} = \mp \frac{1}{x} \times \sqrt{\frac{\Lambda}{V}} = \mp \sqrt{\frac{V}{\Lambda}}$$

$$\xrightarrow{\text{bc}} \left( +\frac{2\sqrt{V}}{\sqrt{V}}, +\frac{2\sqrt{V}}{\sqrt{V}}, -\frac{\sqrt{V}}{\sqrt{V}} \right), \left( -\frac{2\sqrt{V}}{\sqrt{V}}, -\frac{2\sqrt{V}}{\sqrt{V}}, +\frac{\sqrt{V}}{\sqrt{V}} \right)$$

$$P(n, y, z) = ny + nz$$

$$P(-1, 0, 0) = 0$$

$$P(1, 0, 0) = 0$$

$$P(1, \sqrt{V}, 0) = \sqrt{V}$$

$$P(1, -\sqrt{V}, 0) = -\sqrt{V}$$

$$P(-1, \sqrt{V}, 0) = -\sqrt{V}$$

$$P(-1, -\sqrt{V}, 0) = \sqrt{V}$$

$$P\left(\frac{2\sqrt{V}}{\sqrt{V}}, \frac{2\sqrt{V}}{\sqrt{V}}, -\frac{\sqrt{V}}{\sqrt{V}}\right) = \frac{\Lambda}{V} - \frac{V}{V} = \frac{V}{V}$$

$$P\left(-\frac{2\sqrt{V}}{\sqrt{V}}, -\frac{2\sqrt{V}}{\sqrt{V}}, \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{V}}\right) = \frac{\Lambda}{V} - \frac{V}{V} = \frac{V}{V}$$

$$2) f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad 2x^2 + y^2 - z^2 = 2$$

جواب:

$$g(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z^2 - 2 = 0$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{شرط سكون}} \left. \begin{aligned} \exists \lambda, \nabla f &= \lambda \nabla g \\ \nabla f &= (2x, 2y, 2z) \\ \nabla g &= (4x, 2y, -2z) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (2x, 2y, 2z) = \lambda(4x, 2y, -2z) \\ \Rightarrow \begin{cases} 2x = 4\lambda x \text{ (1)} \Rightarrow x=0 \text{ } \vee \text{ } \lambda = \frac{1}{2} \\ 2y = 2\lambda y \text{ (2)} \Rightarrow y=0 \text{ } \vee \text{ } \lambda = 1 \\ 2z = -2\lambda z \text{ (3)} \Rightarrow z=0 \text{ } \vee \text{ } \lambda = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \swarrow \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{(2)} \quad 2y = y \Rightarrow y=0 \\ \text{(3)} \quad 2z = -z \Rightarrow z=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{(1)}} 2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ \Rightarrow \boxed{(1, 0, 0), (-1, 0, 0)} \end{aligned}$$

$$\swarrow x=0 \xrightarrow{\text{(1)}} y^2 - z^2 = 2$$

$$\text{(2)} \Rightarrow y=0 \text{ } \vee \text{ } \lambda = 1$$

$$\swarrow y=0 \xrightarrow{\text{(3)}} z^2 = -2 \quad \#$$

$$\swarrow \lambda = 1 \xrightarrow{\text{(3)}} 2z = -2z \Rightarrow z=0 \xrightarrow{\text{(1)}} y^2 - 2 = 0 \Rightarrow y = \pm \sqrt{2} \\ \Rightarrow \boxed{(0, \sqrt{2}, 0), (0, -\sqrt{2}, 0)}$$

$$\text{(3)} \Rightarrow z=0 \text{ } \vee \text{ } \lambda = -1$$

$$\swarrow z=0 \xrightarrow{\text{(1)}} y^2 = 2 \Rightarrow \text{نقطه سكون}$$

$$\swarrow \lambda = -1 \xrightarrow{\text{(2)}} y=0 \xrightarrow{\text{(3)}} z^2 = -2 \quad \#$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} (1) & 2x = -x \Rightarrow x = 0 \\ (2) & 2z = -z \Rightarrow z = 0 \end{cases} \xrightarrow{(*)} y^2 - 2 = 0 \Rightarrow y = \pm \sqrt{2} \Rightarrow \text{نقطه بحر}$$

$$\lambda = 0 \xrightarrow{(*)} 2x^2 - z^2 = 2 \quad (***)$$

$$(1) \Rightarrow x = 0 \leq \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\lambda = 0 \xrightarrow{(***)} z^2 = -2 \quad \#$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \xrightarrow{(2)} 2z = -z \Rightarrow z = 0 \xrightarrow{(***)} 2x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\Rightarrow (1, 0, 0), (-1, 0, 0) \quad \text{نقطه بحر}$$

$$(2) \Rightarrow z = 0 \leq \lambda = -1$$

$$\lambda = 0 \xrightarrow{(***)} 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \text{نقطه بحر}$$

$$\lambda = -1 \xrightarrow{(1)} 2x = -x \Rightarrow x = 0 \xrightarrow{(***)} -z^2 = 2 \quad \#$$

$$\lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} (1) & 2x = -x \Rightarrow x = 0 \\ (2) & 2y = -2y \Rightarrow y = 0 \end{cases} \xrightarrow{(*)} -z^2 = 2 \quad \#$$

$$\lambda = 0 \xrightarrow{(*)} 2x^2 + y^2 = 2 \quad (***)$$

$$(1) \Rightarrow x = 0 \leq \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\lambda = 0 \xrightarrow{(***)} y^2 = 2 \Rightarrow \text{نقطه بحر}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \xrightarrow{(2)} 2y = y \Rightarrow y = 0 \xrightarrow{(***)} 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \text{نقطه بحر}$$

$$(2) \Rightarrow y = 0 \leq \lambda = 1$$

$$\lambda = 0 \xrightarrow{(***)} 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \text{نقطه بحر}$$

$$\lambda = 1 \xrightarrow{(1)} 2x = x \Rightarrow x = 0 \xrightarrow{(***)} y^2 = 2 \Rightarrow \text{نقطه بحر}$$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$f(1, 0, 0) = 1$$

$$f(0, \sqrt{2}, 0) = 2$$

$$f(-1, 0, 0) = 1$$

$$f(0, -\sqrt{2}, 0) = 2$$

$$\begin{matrix} (\pm 1, 0, 0) \\ (0, \pm \sqrt{2}, 0) \end{matrix} \quad \text{نقطه بحر}$$

## مسائل

با استفاده از ضرایب لاگرانژ، اکسترممهای تابع  $f$  را تحت قید داده شده پیدا نمایید.

$$f(x, y) = 3x - 2y + 1, 9x^2 + 4y^2 = 18 \quad . ۱$$

$$f(x, y) = xy, 3x + 2y - 36 = 0 \quad . ۲$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2, xy = 1 \quad . ۳$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2, x^4 + y^4 = 2 \quad . ۴$$

$$f(x, y) = x^2 + 8y^2, \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \quad . ۵$$

$$f(x, y) = x^2 y^2, x^2 + y^2 = 1 \quad . ۶$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2, x^2 - y^2 = 1 \quad . ۷$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2, (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 8 \quad . ۸$$

$$f(x, y, z) = 2x - 3y + z - 1, x^2 + y^2 + z^2 = 14 \quad . ۹$$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, x - 2y + 2z = 6 \quad . ۱۰$$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{8}x + \frac{1}{27}y + \frac{1}{64}z, xyz = 1 \quad (x, y, z \text{ مثبت}) \quad . ۱۱$$

$$f(x, y, z) = x - y + z, 4x^2 + y^2 + 9z^2 = 49 \quad . ۱۲$$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, 2x^2 + y^2 - z^2 = 2 \quad . ۱۳$$

۱۴.  $f(x, y, z) = xy + xz, x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 4$

با استفاده از ضرایب لاگرانژ، فاصله بین

۱۵. نقطه  $(-1, 4)$  و خط  $12x - 5y + 71 = 0$

۱۶. نقطه  $(1, 1, 1)$  و صفحه  $2x + 6y - 9z + 12 = 0$

را بیابید.

۱۷. نقطه‌ای از سهمی  $(y - 1)^2 = 4x$  را بیابید که از همه به نقطه  $(2, 0)$  نزدیکتر باشد.

۱۸. نقطه‌ای از هذلولی  $x^2 - y^2 = 1$  را بیابید که از همه به نقطه  $(0, 4)$  نزدیکتر باشند.

۱۹. نقطه‌ای از سهمی  $y = \frac{1}{4}x^2$  را بیابید که از همه به خط  $x - y - 4 = 0$  نزدیکتر باشد.

۲۰. نقطه‌ای از بیضی  $4x^2 + y^2 = 4$  را بیابید که از همه به خط  $3x - 2y + 6 = 0$  نزدیکتر یا دورتر باشند.