

اگر هم تابع چند متغیره:

حال در مورد اگر هم تابع چند متغیره و نحوه بدست آوردن آن از عبارت خود هم گذر

تعریف: گوئیم $f(x,y)$ بر D در نقطه (a,b) ماکزیمم ^{مطلق} دارد اگر
 $(D \subseteq \mathbb{R}^2)$

$$1) D \subseteq D_f$$

$$2) (a,b) \in D$$

$$3) \forall (x,y) \in D, f(x,y) \leq f(a,b).$$

و به طور مشابه $f(x,y)$ بر D در نقطه (c,d) می نهم ^{مطلق} دارد اگر
 $(D \subseteq \mathbb{R}^2)$

$$1) D \subseteq D_f$$

$$2) (c,d) \in D$$

$$3) \forall (x,y) \in D, f(x,y) \geq f(c,d).$$

و هرگاه در یک (a,b) ، $f(x,y) \leq f(a,b)$ گوئیم f در نقطه (a,b) ماکزیمم نسبی (محلی) دارد و اگر در یک (c,d) ، $f(c,d) \leq f(x,y)$ گوئیم f در نقطه (c,d) می نهم نسبی دارد.
 (توضیحات: بیشتر در فصل بعدی و تقریری)



نقطه (α, β) را نقطه نسبی تابع $f(x,y)$ گوئیم اگر

در برخی δ که (α, β) از (α, β) نقطه ماکزیمم باشد و

در برخی δ که (α, β) می نهم باشد. (توضیحات: بیشتر در فصل بعدی و تقریری)

هر نقطه اگر هم ^{مطلق} که نقطه درونی D باشد، یک اگر هم محلی است.

قضیه: فرض کنید D مجموعه‌ای بسته و کاملاً باز باشد. (بسته به این معنی که مرز آن شامل شود و کاملاً باز به این معنی که داخل یک کره باز نباشد)
 $(D \subseteq \mathbb{R}^2)$

تابع پیوسته $f(x, y)$ را در D در نظر بگیرید. فرض کنید $(a, b), (c, d) \in D$ و f در آن‌ها دارای مقادیر مطلق است؛ یعنی f در D دارای مقادیر مطلق است.
 $(D \subseteq \mathbb{R}^2)$

$$\forall (x, y) \in D, \quad f(c, d) \leq f(x, y) \leq f(a, b).$$

(توضیح در فایل)

برای بیان این که f در D دارای مقادیر مطلق است، ابتدا اگر f در D دارای مقادیر مطلق است و سپس f در D دارای مقادیر مطلق است.

قضیه: اگر $f(x, y)$ در (a, b) دارای مقادیر مطلق باشد؛ آن گاه یا f در (a, b) مشتق پذیر است یا f در (a, b) مشتق پذیر بوده و $\vec{\nabla} f(a, b) = \vec{0}$ ؛ یعنی $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$.

بعبارة دیگر، $f(x, y)$ در (a, b) صفره‌ها را ندارد یا صفره‌ها را آن افقی است.

توجه: $f(x, y)$ در (a, b) مشتق پذیر است و $\vec{\nabla} f(a, b) = \vec{0}$ ؛ یعنی f در (a, b) مشتق پذیر است و $\vec{\nabla} f(a, b) = \vec{0}$ ؛ (واقعاً مانند 1)

اگر f در (a, b) مشتق پذیر است $\Rightarrow$ نقطه بحرانی

اگر در نقطه (a, b) داشته باشیم $\vec{\nabla} f(a, b) = \vec{0}$ و در f داریم $f(x, y) < f(a, b)$ و در f داریم $f(x, y) > f(a, b)$ آن گاه (a, b) همان نقطه بحرانی است و f در (a, b) مشتق پذیر است.

مثلاً در دو متغیر این اسبی $Z = x^2 - y^2$ میانه نقطه‌بندی است زیرا

$$f(x, y) = x^2 - y^2 \Rightarrow \vec{\nabla} f = (2x, -2y), \quad \vec{\nabla} f(0, 0) = (0, 0)$$

از طرفی $x=0$ می‌گیریم، $f(x, y) = f(0, y) = -y^2 \leq f(0, 0)$

$y=0$ می‌گیریم، $f(x, y) = f(x, 0) = x^2 \geq f(0, 0)$

پس میانه نقطه‌بندی است.

تک‌نقطه‌بندی در دو متغیر: اگر (a, b) نقطه بحرانی $f(x, y)$ بوده و f در یک گویان دور (a, b) فرنی در آن یک‌نقطه‌بندی.

فرض $A = f_{xx}(a, b), \quad B = f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b), \quad C = f_{yy}(a, b)$

$$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

داریم:

الف) اگر $D > 0, A < 0$ ، f در (a, b) یک‌نقطه‌بندی محلی دارد.

ب) اگر $D > 0, A > 0$ ، f در (a, b) یک‌نقطه‌بندی محلی دارد.

ج) اگر $D < 0$ ، f در (a, b) نقطه‌بندی دارد.

د) اگر $D = 0$ ، آن‌را نمی‌توانیم بگوییم.

مثال: اگر f یک‌نقطه‌بندی محلی در (a, b) باشد.

1) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

$f_x = 3x^2 - 3y, \quad f_y = 3y^2 - 3x, \quad \vec{\nabla} f = \vec{0}$

$f_{xx} = 6x, \quad f_{yy} = 6y, \quad f_{xy} = f_{yx} = -3$ (۳)

جواب: این یک‌نقطه‌بندی نیست؛ لذا

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 1$$

$\downarrow$
 $y = 0$

$\downarrow$
 $y = 1$

پس $(0,0)$ و $(1,1)$ نقاط بحرانی هستند. حال آنکه در هر دو نقطه مقدار تابع برابر می‌باشد.

$(0,0)$

$$A = f_{xx}(0,0) = 4x|_{(0,0)} = 0, \quad B = f_{xy} = -2, \quad C = f_{yy}(0,0) = 4y|_{(0,0)} = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$D < 0$ لذا نقطه $(0,0)$ ازین است.

$(1,1)$

$$A = f_{xx}(1,1) = 4x|_{(1,1)} = 4, \quad B = f_{xy} = -2, \quad C = f_{yy}(1,1) = 4y|_{(1,1)} = 4$$

$$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 4 = 12$$

$A > 0, D > 0$ ، لذا نقطه $(1,1)$ نقطه می‌نیم ازین است و مقدار می‌نیم ازین برابر است با $f(1,1) = -1$.

۲) $g(x,y) = xy(2-x-y)$

$$g_x = 2y - 2xy - y^2$$

$$g_y = 2x - x^2 - 2xy$$

جهت تعیین بیشینه و کمینه $g(x,y) = 2xy - x^2y - xy^2$

$$\nabla g = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 2y - 2xy - y^2 = 0 \\ 2x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(2-2x-y) = 0 \\ x(2-x-2y) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ یا } y = 2-x \\ x = 0 \text{ یا } x = 2-y \end{cases}$$

(۴)

$$\Rightarrow (0,0), (0,2), (2,0), (1,1)$$

نقطه برای

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=2-2x \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=2-2y \end{cases}$$



$$\begin{cases} y=2-2x \\ x=2-2y \end{cases} \Rightarrow y=2-4+2y \Rightarrow 2y=2 \Rightarrow y=1 \Rightarrow x=1$$

حال که این دو خط را بر هم می‌کشیم.

$$\rightarrow (0,0)$$

$$A = g_{xx}(0,0) = 0, \quad B = g_{xy}(0,0) = 2, \quad C = g_{yy}(0,0) = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$D < 0$ لذا $(0,0)$ نقطه زینی است.

$$\begin{cases} g_x = 2y - 2xy - y^2 \\ g_y = 2x - x^2 - 2xy \\ g_{xx} = -2y \\ g_{xy} = g_{yx} = 2 - 2x - 2y \\ g_{yy} = -2x \end{cases}$$

$$\rightarrow (0,2)$$

$$A = g_{xx}(0,2) = -4, \quad B = g_{xy}(0,2) = -4, \quad C = g_{yy}(0,2) = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16$$

$D < 0$ لذا $(0,2)$ نقطه زینی است.

$$\rightarrow (2,0)$$

$$A = g_{xx}(2,0) = 0, \quad B = g_{xy}(2,0) = -2, \quad C = g_{yy}(2,0) = -4$$

$$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -4$$

$D < 0$ لذا $(2,0)$ نقطه زینی است.

$$\rightarrow (1,1)$$

$$A = g_{xx}(1,1) = -2, \quad B = g_{xy}(1,1) = -1, \quad C = g_{yy}(1,1) = -2$$

$$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3$$

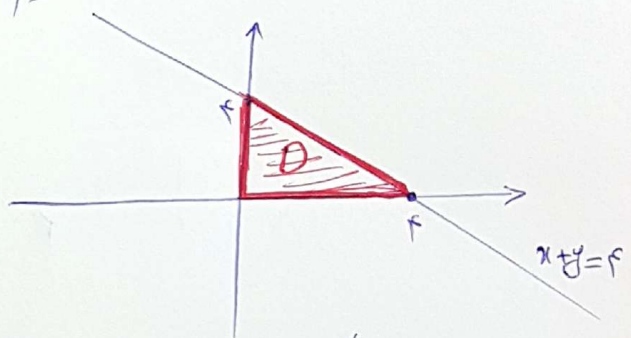
$D > 0, A < 0$ لذا $(1,1)$ نقطه محلی است.

برای بدست آوردن اگر هم در مطلق یک تابع چندتاییه، همی نگردد که اثبات وند ابتدا اگر هم در منحنی را بر ناحیه بسته در انداز
 داده شده بدست می آوریم. سپس مرز ناحیه را جداگانه مورد مطالعه و بررسی قرار می دهیم و نقاط اگر هم تابع مرز ناحیه را هم
 بدست می آوریم. در نهایت با مقایسه مقدار تابع در نقاط بدست آمده، اگر هم در مطلق بدست می آید. (توضیح: تکلیف در نایل صفتی
 به مثال زیر توجه نمایند.)

مثال: اگر هم در مطلق تابع داده شده مرز ناحیه ذکر شده بیاید.

① $P(x,y) = xy(4-x-y)$ ، D ناحیه بسته بین محورهای نامنفی فقط و خط $x+y=4$.

جواب: ابتدا ناحیه D را در صفحه مشخص می کنیم.



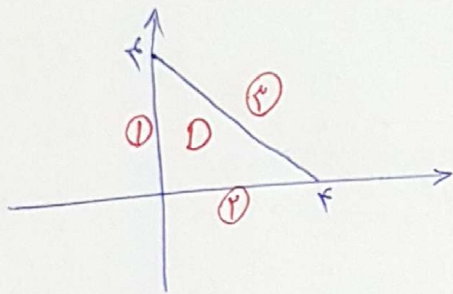
دوم: تمام نقاط اگر هم منحنی تابع $P(x,y)$ را در ناحیه D بدست می آوریم.

این کار را در مثال قبل انجام دادیم و دیدیم که نقطه (۱,۱) نقطه اگر هم تابع است و اینکه این نقطه در ناحیه D
 نیز قرار دارد. توجه: این نقطه اگر هم منحنی تابع را در نظر می گیریم که در ناحیه D باشد.

سوم: مرز ناحیه D را در تابع $P(x,y)$ قرار داده و اگر هم در آن را بدست می آوریم

چون مرز ناحیه D متشکل است، حرکت را جدا جدا بررسی کنیم

معادله مرز را نوشته و در تابع قرار می دهیم.



مرز ① ناحیه D: $x=0, 0 \leq y \leq 4$ معادله مرز

وارد کردن مرز در تابع $\Rightarrow g(y) = f(0, y) = 0, 0 \leq y \leq 4 \Rightarrow g(y) = 0, y \in [0, 4]$

اینجا تابع ثابت است، لذا نقاط کلیه نقطه ابتدای و انتهای باز هستند.
 اگر هم در تابع یک مستقیمه بود، ابتدا را در ناحیه $\frac{dy}{dx}$ می بینیم. (نقطه ای که در تابع قرار می دهیم)

پس $(0, 0), (0, 4)$ نقاط کلیه تابع $f(x, y)$ هستند.
 دامنه $x=0$
 بازه $y=0, y=4$

مرز ② ناحیه D: $y=0, 0 \leq x \leq 4$ معادله مرز

وارد کردن مرز در تابع $\Rightarrow h(x) = f(x, 0), 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow h(x) = 0, x \in [0, 4]$

نقاط کلیه بازه نقطه ابتدای و انتهای باز هستند.
 پس $(0, 0), (4, 0)$ نقاط کلیه $f(x, y)$ هستند.
 دامنه $y=0$
 بازه $x=0, x=4$

مرز ③ ناحیه D: $y=4-x, 0 \leq x \leq 4$ معادله مرز

وارد کردن مرز در تابع $\Rightarrow k(x) = f(x, 4-x), 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow k(x) = x(4-x)(4-x-x)$
 $x \in [0, 4]$

$\Rightarrow k(x) = x(4-x)(-1) = x(x-4) = x^2 - 4x, x \in [0, 4]$

$k'(x) = 2x - 4$

$k'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{y=4-2x} y = 2 \Rightarrow (2, 2)$
 نقطه ای که در $k(x)$ در $[0, 4]$ ثابت می دهیم.
 نقطه کلیه
 (۷)

$$\begin{pmatrix} 2, 2 \\ 0, 4 \\ 4, 0 \end{pmatrix}$$

با فرض کردن ابتدا و آخری بازه، کلید نقطه کلیه زیر بررسی تابع

$$\begin{aligned} x=0 & \xrightarrow{y=4-x} y=4 \\ x=4 & \xrightarrow{y=4-x} y=0 \end{aligned}$$

توجه: نقطه حتماً باید در محدوده مرز باشند (نقطه‌ای که در داخل است و نه در مرز)

$$f(x, y) = xy(4-x-y)$$

چهارم: تمام نقاط بدست آمده از مراحل دوم و سوم را می‌نویسیم

$$\begin{array}{ll} (1, 1) & f(1, 1) = 1 \text{ Max} \\ (0, 0) & f(0, 0) = 0 \\ (0, 4) & f(0, 4) = 0 \\ (4, 0) & f(4, 0) = 0 \\ (2, 2) & f(2, 2) = -4 \text{ Min} \end{array}$$

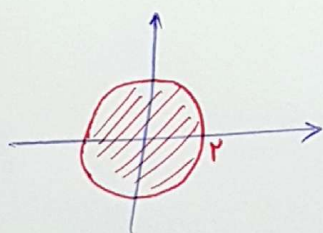
و مقدار تابع را در آنجا بدست می‌آوریم
کمترین مقدار، مقدار می‌نویسیم مطلق و
بیشترین آن، مقدار می‌نویسیم مطلق است

لذا نقطه $(2, 2)$ نقطه می‌نویسیم مطلق و نقطه $(1, 1)$ نقطه می‌نویسیم مطلق $f(x, y)$ بر روی D است.

$$D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4 \}$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

(۲)



جدایب: اول: مشتق کردن ناحیه D

نقطه در دو دایره دایره اول به مرکز مبدأ و شعاع ۲

دوم: پیدا کردن تمام نقاط که هم نبی $f(x, y)$ باشد
 $f(x, y)$ مشتق نپذیرد.

$$f_x = 2x, \quad f_y = -2y$$

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = f_{yx} = 0, \quad f_{yy} = -2$$

(۱)

$$\vec{\nabla} P = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

(0,0) تنها نقطه بحرانی است.

$$A = P_{xx}(0,0) = 2$$

$$B = P_{xy}(0,0) = 0$$

$$C = P_{yy}(0,0) = -2$$

$$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

$D < 0$ ، لذا نقطه سرجی است.

پس $P(0,0)$ نقطه اکسترم نمی‌باشد.

پس: برای مرزهای D درج

$$D: x^2 + y^2 = 4 \rightarrow y^2 = 4 - x^2, -2 \leq x \leq 2$$

$$\xrightarrow{\text{قرار دادن مرز در تابع}} g(x) = P(x, \pm\sqrt{4-x^2}) = x^2 - (4-x^2) = x^2 - 4 + x^2 = 2x^2 - 4$$

$$\Rightarrow g(x) = 2x^2 - 4, x \in [-2, 2]$$

حل می‌کنیم اکسترم g بر $[-2, 2]$

$$g'(x) = 4x$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$y^2 = 4 - x^2$$

$$y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$$

و

$$y^2 = 4 - x^2$$

$$\Rightarrow y = 0$$

ابتدا و آخره نیز

$$(0, 2)$$

$$(0, -2)$$

$$(2, 0)$$

$$(-2, 0)$$

$$P(x, y) = x^2 - y^2$$

$$(0, 2)$$

$$(0, -2)$$

$$(2, 0)$$

$$(-2, 0)$$

$$P_{xy}$$

$$P(0, 2) = -4$$

$$P(0, -2) = -4$$

$$P(2, 0) = 4$$

$$P(-2, 0) = 4$$

min

max

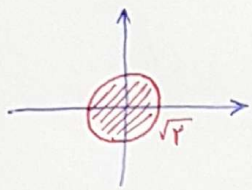
پس: مقادیر متغیر تابع در تمام نقاط آمده

$(0, 2)$ و $(0, -2)$ نقاطی نیمه محلی با مقدار نیمه -4 و

$(2, 0)$ و $(-2, 0)$ = ماکزیمم = ماکزیمم 4 بدست می‌آیند.

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\}, \quad f(x, y) = xy$$

(۳)



پیدا کردن: اول: ناحیه D
نقطه درون دایره را به مرکز حداثه شعاع $\sqrt{2}$

دوم: پیدا کردن نقاط اکسترمم نسبی $f(x, y)$ بر D
پیدا کردن مشتق نسبی است.

$$f_x = y, \quad f_y = x$$

$$f_{xx} = 0, \quad f_{xy} = f_{yx} = 1, \quad f_{yy} = 0$$

$$\vec{\nabla} f = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (0, 0) \text{ نقطه} \\ \text{برای} \end{matrix}$$

$$A = f_{xx}(0, 0) = 0, \quad B = f_{xy}(0, 0) = 1, \quad C = f_{yx}(0, 0) = 0, \quad D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$D < 0$ نقطه $(0, 0)$ نقطه زینی است. پس $f(x, y)$ نقطه اکسترمم نسبی ندارد.

سوم: بررسی مرز ناحیه D در تابع

$$D \text{ مرز: } x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{2 - x^2}, \quad x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

$$\textcircled{1} \quad y = \sqrt{2 - x^2} \xrightarrow{\text{تعويض}} g(x) = f(x, \sqrt{2 - x^2}) = x\sqrt{2 - x^2}, \quad x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$$g'(x) = \sqrt{2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{2 - x^2}}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2 - x^2 - x^2}{\sqrt{2 - x^2}} = 0 \Rightarrow 2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$\Downarrow y = \sqrt{2 - x^2}$
 $y = 1$

$$\boxed{(1, 1), (-1, 1)} \text{ نقاط}$$

$$(2) y = -\sqrt{2-x^2} \xrightarrow{\text{تعويض}} h(x) = f(x, -\sqrt{2-x^2}) = -x\sqrt{2-x^2}, x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$$h'(x) = -\sqrt{2-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-(2-x^2) + x^2}{\sqrt{2-x^2}} = 0 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1$$

$\downarrow y = -\sqrt{2-x^2}$
 $y = -1$

$$\boxed{(-1, -1) \text{ و } (1, -1)} \text{ نقاط}$$

$$f(x, y) = xy$$

$(1, 1)$	$f(1, 1) = 1$	$\rightarrow \text{max}$ $\rightarrow \text{min}$
$(-1, 1)$	$f(-1, 1) = -1$	
$(-1, -1)$	$f(-1, -1) = 1$	
$(1, -1)$	$f(1, -1) = -1$	

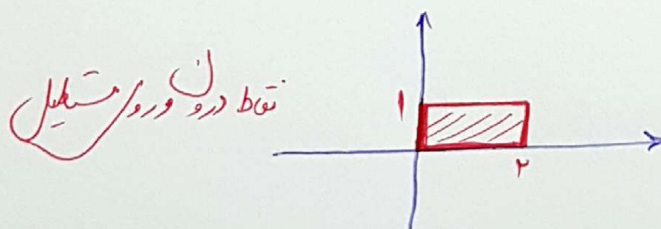
چون: مقایسه مقدار تابع در نقاط بیست آمده

پس $(1, 1)$ و $(-1, -1)$ نقاط ~~حداکثر~~ ^{حداکثر} مطلق
و $(-1, 1)$ و $(1, -1)$ نقاط ~~حداقل~~ ^{حداقل} مطلق
 $f(x, y)$ بر ناحیه D هستند.

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$(3) f(x, y) = 2xy + y^2 + 4x - 4y$$

جواب: اول ناحیه D



دوم: بیابان نقاط اکسترمیمی $f(x, y)$ بر D
 $f(x, y)$ مشتق پذیر است.

$$f_x = 2y + 4, \quad f_y = 2x + 2y - 4$$

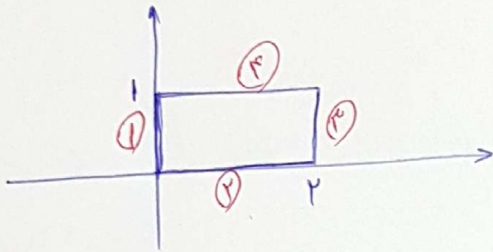
$$f_{xx} = 0, \quad f_{xy} = f_{yx} = 2, \quad f_{yy} = 2$$

$$\vec{\nabla} f = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = -4 \\ 2x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow x = 6 \end{cases} \Rightarrow (6, -4)$$

نقطه بحرانی

اما $(6, -4) \notin D$ لذا این نقطه را هم در نظر نمی‌گیریم.

سوم: برای مرزهای D تابع $f(x, y) = 2xy + y^2 + 11x - 4y$



مرز ۱: $x=0, 0 \leq y \leq 1$

مرز ۱: $g(y) = f(0, y) = y^2 - 4y, y \in [0, 1]$

$$g'(y) = 2y - 4$$

$$g'(y) = 0 \Rightarrow y = 2, y \notin [0, 1]$$

پس چیزی

پس این نقطه هم در D نیست

نقطه کلیدی

ابتدا و انتها $x=0, y=0$

$(0, 0), (0, 1)$

مرز ۲: $y=0, 0 \leq x \leq 2$

مرز ۲: $h(x) = f(x, 0) = 11x, x \in [0, 2]$

$$h'(x) = 11$$

این هم صاف می‌باشد

نقطه کلیدی $x=0, 2, y=0$
ابتدا و انتها

$(0, 0), (2, 0)$

③ حزب: معادله مرز $x=2, 0 \leq y \leq 1$

مرز در تابع $\rightarrow k(y) = P(2, y) = 4y + y^2 + 16 - 4y = y^2 + 16, y \in [0, 1]$

$$k'(y) = 2y$$

$$k'(y) = 0 \Rightarrow y = 0 \xrightarrow{\text{مرز } x=2} x=2 \xrightarrow{\text{نقطه}} (2, 0)$$

$x=2$
 $y=0$ ابتدا و انتها بازه

$(2, 0), (2, 1)$ نقطه کلیه

④ حزب: معادله مرز $y=1, 0 \leq x \leq 2$

مرز در تابع $\rightarrow u(x) = P(x, 1) = 2x + 1 + 1x - 4 = 3x - 3, x \in [0, 2]$

$$u'(x) = 3$$

همیشه مثبت و ندارد

$y=1$
 $x=0, 2$ مرز بازه

$(0, 1), (2, 1)$ نقطه کلیه

$$P(x, y) = 2xy + y^2 + 1x - 4y$$

در تابع در نقاط کلیه

$(0, 0)$	$P(0, 0) = 0$
$(0, 1)$	$P(0, 1) = -3 \text{ min}$
$(2, 0)$	$P(2, 0) = 16$
$(2, 1)$	$P(2, 1) = 17 \text{ max}$

مرز در تابع

پس $(2, 1)$ نقطه کمترین مطلق
و $(0, 1)$ نقطه بیشترین مطلق P مرز بازه است.

چند تمرین :

اگر - معادله تعلق تابع زیر را در بازه داده شده بنویسید

$$1) f(x, y) = 2x^2y + x^2y, \quad D = \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} \text{محدوده محدود} \\ \text{و خط } x+y=2 \end{array} \right\}$$

$$2) g(x, y) = x^2y + 5x - 2y + 4, \quad D = \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{array} \right\}$$

$$3) h(x, y) = e^{xy}, \quad D = \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} \text{محدوده} \\ \text{محدوده } y = x^2 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{array} \right\}$$

مسائل

تمام نقاط بحرانی تابع داده شده را بیابید. سپس معین کنید که هر نقطه بحرانی نظیر به ماکزیمم موضعی، مینیمم موضعی، یا نقطه زینی است.

$$1. \quad f(x, y) = 2x^2 + (y - 1)^2$$

$$2. \quad f(x, y) = (x + 1)^2 - 2y^2$$

$$3. \quad f(x, y) = -x^2 + xy - y^2 + 6x - 9y + 15$$

$$4. \quad f(x, y) = (x - y + 2)^2$$

$$5. \quad f(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2 - 2x - 4y + 8$$

$$6. \quad f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 108y$$

$$7. \quad f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$$

$$8. \quad f(x, y) = xy + 20x^{-1} + 50y^{-1} \quad (x > 0, y > 0)$$

$$9. \quad f(x, y) = x\sqrt{y} - x^2 + 9x - y \quad (y > 0)$$

$$10. \quad f(x, y) = 8x^3 + y^3 - 12xy + 6$$

$$11. \quad f(x, y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$$

$$12. \quad f(x, y) = x^2y^3(6 - x - y) \quad (x > 0, y > 0)$$

$$13. \quad g(u, v) = u \sin v$$

$$14. \quad h(u, v) = e^u \cos v$$

$$15. \quad f(x, y) = \sin x + \sin y \quad (0 < x < \pi, 0 < y < \pi)$$

$$16. \quad f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y) \quad (0 < x < \pi, 0 < y < \pi)$$

$$17. \quad f(x, y) = (x^2 + 2x + y)e^y$$

$$18. \quad f(x, y) = e^{xy}$$

$$19. \quad f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$$

$$20. \quad f(x, y) = (x - 1) \ln xy \quad (xy > 0)$$